Hans U. Simon
Björn Schuster
Malte Darnstädt

Bochum, den 15.11.2013
Abgabe: 26.11.2013 (bis 10:00 Uhr)

Übungen zur Vorlesung

Diskrete Mathematik

WS 13/14

Übungsblatt 05

Hinweise:

- Der Klausurtermin verschiebt sich ein weiteres (und hoffentlich letztes) Mal:
  Die Klausur findet voraussichtlich am **13. März 2014** statt.
- Für jede der Hausaufgaben ist eine vollständige mathematische Argumentation verlangt.
- Bitte die Zettel **nach Aufgaben getrennt abgeben** und die **Nummer der Übungsgruppe aufschreiben**, in der die korrigierte Aufgabe zurückgegeben werden soll.

Aufgabe 5.1 Gegeben sei der gerichtete, azyklische Graph $G = (V, E)$ mit

$$
\begin{aligned}
V &= \{1, \ldots, 9\} \\
E &= \big\{(1,5),\ (1,6),\ (2,4),\ (3,4),\ (5,2),\ (5,3), \\
&\qquad (6,3),\ (6,7),\ (7,9),\ (8,2),\ (9,3),\ (9,4),\ (9,8)\big\}
\end{aligned}
$$

Finde eine topologische Sortierung der Knoten mit Hilfe der um Austrittsnummern erweiterten Tiefensuche mit Startknoten 1. Gib dazu die Entwicklung des Stack-Inhalts und eine Tabelle mit den Austrittsnummern an.

Aufgabe 5.2 Finde je ein Beispiel eines Graphen, der

a) eulersch und hamiltonsch,

b) nicht eulersch, aber hamiltonsch,

c) eulersch, aber nicht hamiltonsch,

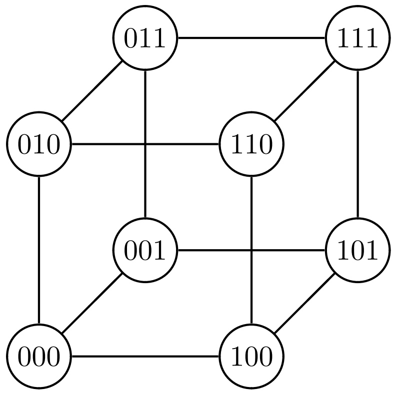
d) weder eulersch noch hamiltonsch

ist. Begründe die Korrektheit Deiner Lösung.

Aufgabe 5.3 Der d-dimensionale Hyperwürfel Q_d ist ein Graph mit Knoten der Form $x = (x_1, \dots, x_d) \in \{0,1\}^d$ und genau einer Kante zwischen $u = (u_1, \dots, u_d)$ und $v = (v_1, \dots, v_d)$, wenn sich u und v in genau einer Stelle unterscheiden, das heißt

$$Q_d = (V_d, E_d) \quad \text{mit} \quad V_d = \{0,1\}^d, \quad E_d = \big\{\{u,v\} : |\{i : u_i \neq v_i\}| = 1\big\}$$

Beweise durch Induktion über d, dass der d-dimensionale Hyperwürfel Q_d hamiltonsch ist (für $d \geq 2$).



Der 3-dimensionale Hyperwürfel Q_3.

Aufgabe 5.4

a) Gibt es einen planaren Graphen mit 6 Knoten und 13 Kanten? Ist es mit 12 Kanten möglich?

b) Weise nach, dass der Graph mit Adjazenzmatrix

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

nicht planar ist.