Hans U. Simon
Malte Darnstädt
Thorsten Doliwa

Bochum, den 23.01.2011

Abgabe: 30.01.2012 (bis 15:15 Uhr)

Übungen zur Vorlesung

Diskrete Mathematik

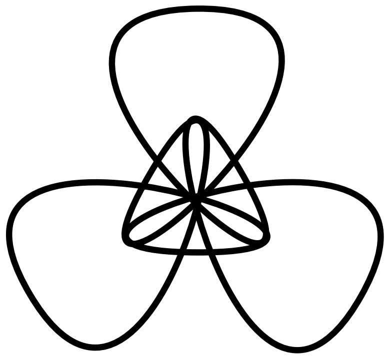
WS 11/12

Übungsblatt 13

Aufgabe 13.1

Die *Symmetriegruppe* eines geometrischen Objektes besteht aus der Menge aller Kongruenzabbildungen (Drehungen, Spiegelungen an Achsen, Verschiebungen und Kombinationen daraus), die das Objekt auf sich selbst abbilden. Die Gruppenoperation ist die Verkettung von Abbildungen.

Beispiel: Eine Kongruenzabbildung von der Blume rechts ist die Drehung um 120° im Uhrzeigersinn. Die Verknüpfung der 120°-Drehung mit sich selbst ist die Drehung um 240°.



a) Bestimme alle Elemente der Symmetriegruppe der Blume (du musst nicht zeigen, dass es sich tatsächlich um eine Gruppe handelt)

b) Bestimme die Inversen und die Ordnung von allen Elementen

c) Zeige, dass die Menge D der Drehungen um 0°, 120° und 240° eine Untergruppe von G bildet. Bestimme die Nebenklassen von D in G.

Aufgabe 13.2 Betrachte die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_3$, d.h. die Gruppe die aus allen Permutationen über den drei Elementen $\{1, 2, 3\}$ besteht (Verknüpfungstabelle siehe Seite 206 im Buch).

Bestimme alle Untergruppen von $\mathfrak{S}_3$.

Aufgabe 13.3 Sei $G = \langle a \rangle$ eine durch a erzeugte zyklische Gruppe mit $|G| = 70$. Bestimme alle unter Isomorphie unterschiedlichen Untergruppen von G.

Aufgabe 13.4 Sei G eine Gruppe. Zeige:

a) Die Abbildung $\varphi : G \to G$ mit $\varphi(a) = a^2$ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn G abelsch ist

b) Die Abbildung $\varphi : G \to G$ mit $\varphi(a) = a^{-1}$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn G abelsch ist

Hinweis: In allen Gruppen gilt $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$