

Übungen zur Vorlesung  
**Diskrete Mathematik**  
WS 11/12  
Übungsblatt 12

**Aufgabe 12.1 (8 Punkte)** Gegeben sei folgende lineare Rekursionsgleichung:

$$a_n := -a_{n-1} + 9a_{n-2} - 11a_{n-3} + 4a_{n-4} ,$$

wobei  $a_0 = 4, a_1 = -2, a_2 = 42$  und  $a_3 = -114$ .

- (3 Punkte) Berechne die erzeugende Funktion  $A(x)$  von  $a_n$
- (2 Punkte) Berechne die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{10x^3 - 4x^2 - 2x - 4}{4x^4 - 11x^3 + 9x^2 - x - 1}$$

- (3 Punkte) Gib die Lösung der obigen Rekursionsgleichung an

**Aufgabe 12.2** Sei auf  $A := \{a, b, c, d\}$  eine Verknüpfung  $\circ$  folgendermaßen definiert:

$\circ$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$d$	$a$	$c$	$b$
$b$	$a$	$b$	$c$	$d$
$c$	$c$	$c$	$c$	$c$
$d$	$b$	$d$	$c$	$a$

- Zeige, dass  $(A, \circ)$  ein abelsches Monoid ist.
- Welche Elemente in  $A$  besitzen Linksinverse bzw. Rechtsinverse bzw. Inverse?
- Warum ist  $(A, \circ)$  keine Gruppe?

**Aufgabe 12.3** Betrachte folgende zwei abelsche Gruppen mit vier Elementen:

- $\mathbb{Z}_4$  mit der Addition modulo 4
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  mit komponentenweiser Addition modulo 2

Zeige dass

- es keinen Isomorphismus zwischen den beiden Gruppen gibt
- diese beiden Gruppen (bis auf Isomorphie) die einzigen abelschen Gruppen mit vier Elementen sind