Hans U. Simon
Malte Darnstädt
Thorsten Doliwa

Bochum, den 24.01.2011

Abgabe: 31.01.2011 (bis 14:15 Uhr)

Übungen zur Vorlesung

Diskrete Mathematik

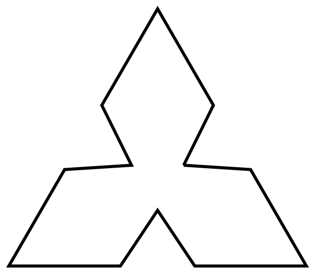
WS 10/11

Übungsblatt 13

Aufgabe 13.1

Die *Symmetriegruppe* eines geometrischen Objektes besteht aus der Menge aller Kongruenzabbildungen (Drehungen, Spiegelungen an Achsen, Verschiebungen und Kombinationen daraus), die das Objekt auf sich selbst abbilden. Die Gruppenoperation ist die Verkettung von Abbildungen.

Beispiel: Eine Kongruenzabbildung von dem Stern rechts ist die Drehung um 120° im Uhrzeigersinn. Die Verknüpfung der 120°-Drehung mit sich selbst ist die Drehung um 240°.



a) Bestimme alle Elemente der Symmetriegruppe des Sterns (du musst nicht zeigen, dass es sich tatsächlich um eine Gruppe handelt)

b) Bestimme die Inversen und die Ordnung von allen Elementen

c) Zeige, dass die Menge D der Drehungen um 0°, 120° und 240° eine Untergruppe von G bildet. Bestimme die Nebenklassen von D in G.

Aufgabe 13.2 Finde eine endliche, abelsche Gruppe G und einen Teiler m von $n = |G|$, so dass G mehr als eine Untergruppe der Ordnung m besitzt.

Hinweis: $\mathbb{Z}_n$ funktioniert nicht!

Aufgabe 13.3 Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $a, b \in G$ zwei beliebige Elemente.

a) Widerlege mit einem konkreten Beispiel folgende Aussage:

$$\text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } (ab)^n = a^n b^n$$

b) Zeige folgende Aussage:

$$G \text{ ist abelsch} \iff \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } (ab)^n = a^n b^n$$

Aufgabe 13.4 Sei $G = \langle a \rangle$ eine durch a erzeugte zyklische Gruppe mit $|G| = 30$. Bestimme alle unter Isomorphie unterschiedlichen Untergruppen von G.