Hans U. Simon
Malte Darnstädt
Thorsten Doliwa

Bochum, den 17.01.2011

Abgabe: 24.01.2011 (bis 14:15 Uhr)

Übungen zur Vorlesung

Diskrete Mathematik

WS 10/11

Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1 Sei auf $A := \{a, b, c, d\}$ eine Verknüpfung $\circ$ folgendermaßen definiert:

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	b	d
c	c	b	a	d
d	d	d	d	d

a) Zeige, dass $(A, \circ)$ ein abelsches Monoid ist.

b) Welche Elemente in A besitzen Linksinverse bzw. Rechtsinverse bzw. Inverse?

c) Warum ist $(A, \circ)$ keine Gruppe?

Aufgabe 12.2 Sei $S \in \{\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}\}$ und A die Menge der Abbildungen von S nach S:

$$A := \{f \mid f : S \to S\}$$

Wir definieren auf A eine Verknüpfung $+$ durch:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ für alle } x \in S$$

Bestimme bei jeder der drei Möglichkeiten für S, ob $(A, +)$ eine Gruppe, ein Monoid und/oder eine Halbgruppe ist.

Aufgabe 12.3 Sei $H = (\mathbb{Z}_8, \cdot, \mathrm{addinv})$, wobei '$\cdot$' die gewöhnliche Multiplikation in $\mathbb{Z}_8$ und 'addinv' das additive Inverse in $\mathbb{Z}_8$ darstellt:

$$\mathrm{addinv}(x) := -x \mod 8$$

Sei $I = (A, \circ, \lhd)$, wobei A und der Operator $\circ$ wie in Aufgabe 1 definiert sind. Für den Operator $\lhd$ gilt:

x	a	b	c	d
$\lhd(x)$	c	b	a	d

a) Zeige, dass H und I Algebren sind. Wie lauten die Signaturen von H und I?

b) Betrachte folgende Abbildung φ von A nach $\mathbb{Z}_8$

x	a	b	c	d
$\varphi(x)$	1	4	7	0

Zeige, dass φ einen Algebra-Homomorphismus zwischen I und H darstellt. Ist der Homomorphismus sogar ein Monomorphismus, Epimorphismus oder Isomorphismus?

c) Gib eine Unteralgebra von H an.

Aufgabe 12.4 Finde eine abelsche Gruppe mit vier Elementen, die nicht isomorph zu $(\mathbb{Z}_4, +)$ ist:

a) Zeige, dass deine Gruppe die Definition einer abelschen Gruppe erfüllt

b) Zeige, dass es keinen Isomorphismus zwischen deiner Gruppe und $\mathbb{Z}_4$ gibt