Hans U. Simon
Malte Darnstädt
Thorsten Doliwa

Bochum, den 10.01.2011

Abgabe: 17.01.2011 (bis 14:15 Uhr)

Übungen zur Vorlesung
Diskrete Mathematik
WS 10/11
Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1 (**8 Punkte**) Gegeben sei folgende lineare Rekursionsgleichung:

$$a_n := -a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3} - 2a_{n-4} \quad ,$$

wobei $a_0 = a_1 = 1$ und $a_2 = a_3 = 4$.

a) (3 Punkte) Berechne die erzeugende Funktion $A(x)$ von a_n

b) (2 Punkte) Berechne die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{4x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1}$$

c) (3 Punkte) Gib die Lösung der obigen Rekursionsgleichung an

Aufgabe 11.2 Beweise oder widerlege: Die folgenden Mengen mit den Operationen Vereinigung $\cup$, Schnitt $\cap$ und Komplementbildung $\overline{}$ sind boolsche Algebren

a) $S = \{A \subseteq \mathbb{N} : A$ ist unendlich und $\overline{A}$ ist unendlich$\}$

b) $S = \{A \subseteq \mathbb{N} : A$ ist endlich oder $\overline{A}$ ist endlich$\}$

Aufgabe 11.3 Sei $n \in \mathbb{N}$ und $S = \{a \in \mathbb{N} : a$ teilt $n\}$. Betrachte S mit den Verknüpfungen kgV, ggT und $\mathrm{inv}(a) := n/a$.

a) Für welche n ist $(S, \mathrm{kgV}, \mathrm{ggT}, \mathrm{inv})$ eine boolsche Algebra (mit Beweis)?

b) Was sind die Atome der Algebra?

Hinweis zu a): Dass (S, kgV) und (S, ggT) abelsche Monoide sind, darf vorausgesetzt werden. Finde aber selbst heraus, was die neutralen Elemente sind!