Hans U. Simon
Michael Kallweit
Malte Darnstädt

Bochum, den 21.11.2009

Abgabe: 12.01.2010 (bis 8:15 Uhr)

Übungen zur Vorlesung
Diskrete Mathematik
WS 09/10
Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1 Gegeben seien eine Menge von n Aufträgen. Zu jedem Auftrag gehört ein Schlußtermin $d_i \in \mathbb{N}$ und ein Gewinn $p_i \in \mathbb{N}_+$. Diese Aufträge sollen auf einer Maschine ausgeführt werden. Die Maschine kann jeden der Aufträge in *einer* Zeiteinheit erledigen. Eine zulässige Lösung ist eine Auswahl $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ der Aufträge, so daß die Aufträge in A so angeordnet werden können, daß jeder dieser Aufträge bis zu seinem Schlußtermin erledigt ist. Gesucht ist eine zulässige Lösung mit maximalem Gewinn.

a) Zeige, dass dem Problem ein Matroid zugrunde liegt.

b) Gib den entsprechenden Greedy-Algorithmus an.

Aufgabe 10.2 Die *Lukaszahlen* sind definiert durch $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ für $n \geq 2$ und $L_1 = 1, L_0 = 2$.

a) Gib eine explizite Darstellung für L_n an.

b) Zeige, dass $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ (wobei F_n die n-te Fibonacci-Zahl bezeichnet)

Aufgabe 10.3 Sei x_n die Anzahl der Wörter in $\{0, 1, 2\}^n$, die keine zwei aufeinanderfolgenden Nullen enthalten. Stelle eine Rekursionsgleichung für x_n auf, löse diese zu einem geschlossenen Ausdruck auf.

Aufgabe 10.4 Im Kapitel über das Rechnen mit großen Zahlen wurden zwei rekursive Methoden zur Multiplikation zweier n-stelliger Zahlen vorgestellt, die diese auf Multiplikationen $\frac{n}{2}$-stelliger Zahlen zurückführte. Der naive Ansatz benötigte **4** solcher Multiplikationen ($\frac{n}{2}$-stelliger Zahlen), der zweite geschicktere kam mit **3** Multiplikationen aus. Bei beiden Verfahren wurden jeweils noch eine konstante Anzahl an Additionen n-stelliger Zahlen benötigt.
Löse die entsprechenden rekursiven Gleichungen für den Rechenaufwand mit Hilfe des Mastertheorems aus der Vorlesung auf.