Hans U. Simon
Michael Kallweit
Malte Darnstädt

Bochum, den 16.11.2009

Abgabe: 24.11.2009 (bis 8:15 Uhr)

Übungen zur Vorlesung

Diskrete Mathematik

WS 09/10

Übungsblatt 05

Aufgabe 5.1 Gegeben sei die Menge $M = \{1, \ldots, n\}$. Gesucht ist eine kreisförmige Anordnung der Elemente aus M (jedes Element darf mehrmals verwendet werden), so dass jedes Element $i \in M$ genau einmal zu jedem anderen Element $j \in M$ $(i \neq j)$ benachbart ist.

a) Für welche $n \in \mathbb{N}$ besitzt dieses Problem eine Lösung?

b) Gib eine konkrete Lösung für das kleinste $n \geq 4$ an, für das eine Lösung existiert.

Aufgabe 5.2 Formuliere folgende Probleme mit Hilfe der Graphentheorie und beweise die Korrektheit deiner Lösung.

a) Tante Zilda wird 50 und will ihre ganze Familie einladen. Jedoch ist ihre Verwandtschaft ziemlich zerstritten: Else kann Dieter und Christiane nicht ausstehen, während Dieter und Alfons mit Fritz nicht zurecht kommen. Fritz hingegen sollte nicht eingeladen werden, wenn Berta erscheint, die sich bei jedem Treffen mit Alfons streitet.

   Wie häufig muss Zilda Geburtstag feiern, wenn sie alle Verwandten einmal einladen will ohne dass es Ärger gibt?

b) Das Bild einer Stereo-Kamera soll von einem dreischichtigen Netz verarbeitet werden: Die Bilder von der linken und rechten Kamera werden zuerst parallel von jeweils einem Mikroprozessor (DSP) gefiltert. In der zweiten Schicht werden Bild-Features extrahiert, wofür vier in einen Ring geschaltete DSPs verwendet werden, wovon jeder mit beiden Filter-DSPs verbunden sein muss. In der dritten Schicht verarbeitet ein DSP die Ausgaben der vier Feature-Extraktoren.

   Können die Leitungen zwischen den DSPs so auf eine Platine geätzt werden, dass sich keine Leitungen überschneiden?

Aufgabe 5.3 Der d-dimensionale Hyperwürfel ist ein Graph, der folgendermaßen definiert ist:
Als Knoten verwenden wir die Bit-Strings der Länge d. Eine Kante zwischen den Knoten $u = (u_1, \dots, u_d)$ und $v = (v_1, \dots, v_d)$ ziehen wir genau dann, wenn u und v sich in genau einer Stelle unterscheiden.
Wir haben also als Knoten- und Kantenmenge:

$$V_d = \{0,1\}^d, \quad E_d := \{\{u,v\} : |i : \{u_i \neq v_i\}| = 1\}$$

Beweise durch Induktion über d: Der d-dimensionale Hyperwürfel ist hamiltonsch.

Aufgabe 5.4

a) Wie viele perfekte Matchings hat ein Pfad mit $n \geq 2$ Knoten?

b) Wie viele perfekte Matchings hat ein Kreis mit n Knoten?

c) Wie viele perfekte Matchings hat der 3-dimensionale Hyperwürfel?

d) Finde im 3-dimensionalen Hyperwürfel ein Matching, das zwar ein maximal Matching ist, aber kein maximum Matching.

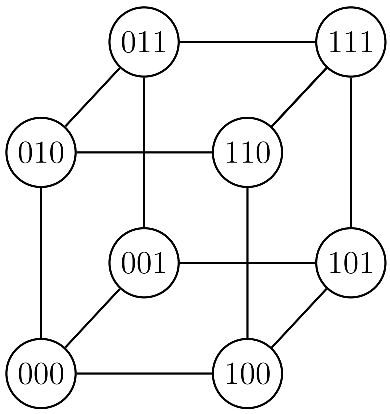

Abbildung 1: Der 3-dimensionale Hyperwürfel