Aufgabe 9.1

Um eine explizite Darstellung der Lukaszahlen zu finden, gibt es zwei Möglichkeiten:

a) *Berechnen nach Satz 4.17*

Dabei ist $a_1 = a_2 = 1$, $L_0 = b_0 = 2$, $L_1 = b_1 = 1$. Wir erhalten folglich $\alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ und folglich $A = 1$ und $B = -1$. Durch Einsetzen ergibt sich

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

b) *Zurückführung auf die Fibonacci-Zahlen*

Wir beobachten:

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$$

Beweis durch vollständige Induktion :

Ind.-Anfang : $L_0 = F_1 + F_{-1} = 1 + 1 = 2$ und $L_1 = F_2 + F_0 = 1 + 0 = 1$

Ind.-Annahme : Behauptung gilt für alle $n' < n$.

Ind.-Schritt : Es gilt $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$. Nach Ind.-Voraussetzung ist damit aber

$$\begin{aligned} L_n &= (F_n + F_{n-2}) + (F_{n-1} + F_{n-3}) \\ &= (F_n + F_{n-1}) + (F_{n-2} + F_{n-3}) = F_{n+1} + F_{n-1} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der expliziten Darstellung der Fibonacci-Zahlen erhalten wir nach Umformen das gewünschte Ergebnis.

Aufgabe 9.3

Die erzeugende Funktion für die geometrische Reihe lautet:

$$\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Wir leiten nun zweimal ab und erhalten damit:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\sum_{n \geq 0} x^n \right)' &= \left(\frac{1}{1-x} \right)' \\ \Rightarrow \sum_{n \geq 1} n x^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ \Rightarrow \sum_{n \geq 1} n x^n &= \frac{x}{(1-x)^2} \\ \Rightarrow \left(\sum_{n \geq 1} n x^n \right)' &= \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' \\ \Rightarrow \sum_{n \geq 1} n^2 x^{n-1} &= \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \\ \Rightarrow \sum_{n \geq 0} n^2 x^n &= \frac{(1+x)x}{(1-x)^3} \end{aligned}$$