Lösungen zu den Übungsaufgaben

Diskrete Mathematik

WS 04/05

Blatt 13

Aufgabe 13.1

Als Beispiel sei hier die Berechnung für die geometrische Verteilung gegeben:
Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion für eine geometrisch verteilte Zufallsgröße X ist

$$G_X(s) = \mathrm{E}[s^X] = \frac{ps}{1-(1-p)s} = \frac{ps}{1-qs} \ ,$$

und damit

$$\begin{aligned} G'_X(s) &= \frac{p(1-qs) - (-q) \cdot ps}{(1-qs)^2} = \frac{p}{(1-qs)^2} \ , \\ G''_X(s) &= \frac{0 \cdot (1-qs)^2 - (-q)2(1-qs) \cdot p}{(1-qs)^4} = \frac{2qp}{(1-qs)^3} \end{aligned}$$

Folglich ist:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= G'_X(1) = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p} \quad \text{und} \\ \mathrm{Var}[X] &= G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \frac{2(1-p)p}{(1-(1-p))^3} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{2(1-p)p}{p^3} + \frac{p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2(1-p)+p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 13.2

Das Spiel des Wirtes kann als zufällige Summe modelliert werden:
Sei N die Anzahl der im Laufe des Abends gefundenen Münzen, dann ist $Z := X_1 + \cdots X_N$, wobei X_i bernoulli-verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Damit ergibt sich für alle $X_i \sim X$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_X(s) = (1-p+ps)$. Da N Poisson-verteilt ist mit Parameter λ, ist $G_N(s) = e^{\lambda(s-1)}$. Nach Satz 1.98 ist damit aber

$$G_Z(s) = G_N(G_X(s)) = e^{\lambda(1-p+ps-1)} = e^{\lambda p(s-1)} \ .$$

Aus $G_Z(s)$ könen wir ablesen, dass $Z \sim Po(\lambda p)$ Poisson-verteilt ist und es ergibt sich:

$$f_Z(k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

und

$$\mathrm{E}[Z] = \mathrm{Var}[Z] = \lambda p \ .$$