Lösungen zu den Übungsaufgaben

Diskrete Mathematik

WS 04/05

Blatt 12

Aufgabe 12.1

a) Aus der Linearität des Erwartungswertes folgt $\mathrm{E}[X-Y] = \mathrm{E}[X] - \mathrm{E}[Y] = \lambda - \mu$. Da X und Y unabhängige Zufallsgrößen sind, gilt nach Satz 1.68 auch $\mathrm{Var}[X-Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[-Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] = \lambda + \mu$.

b) Wir berechnen zuerst den Erwartungswert von $B' := \frac{1}{B+1}$:

$$\mathrm{E}[B'] = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$= \frac{1}{p(n+1)}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}p^k(1-p)^{n+1-k} = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)} \quad .$$

Da X und B unabhängig, sind auch X und B' unabhängig und nach Satz 1.64 gilt

$$\mathrm{E}[\frac{X}{B+1}] = \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[\frac{1}{B+1}] = \lambda\frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)} \quad .$$

Aufgabe 12.2

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Würfelwurf 10 Augen fallen, beträgt $p = P[(5,5)] + P[(4,6)] + P[(6,4)] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Damit kann das Experiment durch eine geometrische verteilte Zufallsgröße X mit Parameter $p = \frac{1}{12}$ modelliert werden. Es ergibt sich also $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{p} = 12$.

b) Sei Z die Zufallsgröße, die die Anzahl der Würfe bis zum k-ten Erfolg zählt. Dabei ist $Z := X_1 + \cdots + X_k$, wobei jede der X_i die Würfe vom $(i-1)$-ten bis zum i-ten Erfolg zählt. Jede dieser X_i ist folglich geometrisch verteilt mit Parameter $p = \frac{1}{12}$ und mit der Linearität des Erwartungswertes folgt $\mathrm{E}[Z] = \mathrm{E}[X_1] + \cdots + \mathrm{E}[X_k] = k\frac{1}{p} = 12k$.

Aufgabe 12.4

Wir betrachten die relative Häufigkeit des Auftretens von Zahl beim n-maligen Würfelwurf $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, wobei alle X_i Bernoulli-verteilt sind mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$. Wir interessieren uns also für das Ereignis $\{\overline{X}_n \geq \frac{2}{3}\}$. Mit $0 \leq \delta := \frac{1}{6} \leq \frac{1}{4} = p(1-p)$ gilt $\frac{2}{3} = p + \delta$ und wir erhalten mit einer additiven Formulierung der Chernov-Schranken:

$$\Pr[\overline{X}_n \geq p + \frac{1}{6}] \leq e^{-2\frac{1}{6}^2 n} = 0.01 \quad .$$

Durch Umformen ergibt sich, dass $\Pr[\overline{X}_n \geq \frac{2}{3}] \leq 0.01$ für $n \geq -18\ln 0.01 \approx 83$.