

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Diskrete Mathematik

WS 04/05

Blatt 11

Aufgabe 11.2

- a) $\text{Var}[X] > 0$: Falsch für $n = 1$, da dann gilt $x_1 = E[X]$ und damit $\text{Var}[X] = (x_1 - E[X])^2 = 0$. Sonst gilt die Aussage, da für $n \geq 2$ aus $x_i \neq E[X]$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, n\}$ folgt, dass $\text{Var}[X] \geq \Pr(X = x_i)(x_i - E[X])^2 > 0$.
- b) $E[X] \geq x_1$: Richtig! $E[X] = \sum_{i=1}^n \Pr(X = x_i)x_i \geq \sum_{i=1}^n \Pr(X = x_i)x_1 = 1 \cdot x_1$.
- c) $\text{Var}[X] \geq x_1$: Falsch! Gegenbeispiel ist Zufallsgröße $X + 1$, wobei X Bernoulli-verteilt mit Gewinnwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$ ist. Damit ist $V[X + 1] = V[X] = \frac{1}{4} < 1 = x_1$.
- d) $\text{Var}[X] \geq E[X]$: Falsch! Gegenbeispiel $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Es gilt: $\text{Var}[X] = np(1 - p) < np \cdot 1 = E[X]$.
- e) $\text{Var}[X] \leq E[X^2]$: Richtig! Mit $E[X]^2 \geq 0$ folgt $\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 \leq E[X^2]$.
- f) $\text{Var}[X] \leq E[X]^2$: Falsch! Gegenbeispiel Bernoulli-verteilte Zufallsgröße mit $(1 - p) < \frac{1}{2} < p$. Es gilt dann $E[X]^2 = p^2 > p(1 - p) = \text{Var}[X]$.

Aufgabe 11.3

Wir betrachten folgende zwei Zufallsgrößen X, Y : $W_X = \{-1, 0, 1\}$ wobei $\Pr(-1) = \Pr(0) = \Pr(1) = \frac{1}{3}$ und $W_Y = \{1, 0\}$ wobei $Y = 1$ falls $X = 0$ und $Y = 1$ sonst.

Damit sind X und Y abhängig, da zum Beispiel $\Pr(X = 0, Y = 0) = 0 \neq \frac{2}{9} = \Pr(X = 0) \Pr(Y = 0)$. Aber es gilt $E[XY] = 0$ und $E[X] = 0$. Damit ist aber $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0$ und X und Y sind damit unkorreliert!

Aufgabe 11.4

Im Folgenden bezeichne A das Ereignis, dass der Kandidat bei seiner ersten Wahl, die Türe mit Auto wählt, G das Ereignis, dass der Kandidat gewinnt und U das Ereignis, dass der Showmaster die Tür im Urzeigersinn öffnet.

- a) Die Strategien A und B der Kandidaten sind unabhängig von der Entscheidung des Showmasters und können daher analog zum klassischen Ziegenproblem analysiert werden:

$$A: \Pr(G) = \Pr(G|A) \Pr(A) + \Pr(G|\bar{A}) \Pr(\bar{A}) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$B: \Pr(G) = \Pr(G|A) \Pr(A) + \Pr(G|\bar{A}) \Pr(\bar{A}) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

C: Für Strategie C muss eine weitere Unterscheidung berücksichtigt werden. Wir definieren dazu die beiden zusätzlichen Ereignisse A_1 (das Auto ist in der im Uhrzeigersinn nächsten Tür) und A_2 (das Auto ist in der im Uhrzeigersinn übernächsten Tür). Dann gilt:

$$\begin{aligned}\Pr(G) &= \Pr(G|A) \Pr(A) + \Pr(G|A_1) \Pr(A_1) + \Pr(G|A_1) \Pr(A_1) \\ &= (\Pr(G|A \cap U) \Pr(U|A) + \Pr(G|A \cap \bar{U}) \Pr(\bar{U}|A)) \Pr(A) \\ &\quad + \Pr(G|A_1) \Pr(A_1) + \Pr(G|A_1) \Pr(A_1) \\ &= (1 \cdot 1 + 0 \cdot 0) \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} ,\end{aligned}$$

da der Showmaster in den Fällen A_1 und A_2 keine Wahl hat und immer die einzig verbliebene freie Tür öffnet, was die Kandidatin bei Strategie C im ersten Fall zum erfolgreichen Wechsel bewegt, im zweiten jedoch fälschlicherweise zum Festhalten an der zuerst gewählten Tür.

- b) Da die beiden Strategien A und B in keiner Weise auf die Entscheidung des Showmasters eingehen, bleiben die Analysen aus Teil a) korrekt und die Gewinnwahrscheinlichkeit ändert sich nicht. Anders mit Strategie C . In diesem Falle gilt:

$$\begin{aligned}\Pr(G) &= \Pr(G|A) \Pr(A) + \Pr(G|A_1) \Pr(A_1) + \Pr(G|A_1) \Pr(A_1) \\ &= (\Pr(G|A \cap U) \Pr(U|A) + \Pr(G|A \cap \bar{U}) \Pr(\bar{U}|A)) \Pr(A) \\ &\quad + \Pr(G|A_1) \Pr(A_1) + \Pr(G|A_1) \Pr(A_1) \\ &= (1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2}) \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} ,\end{aligned}$$