Lösungen zu den Übungsaufgaben

Diskrete Mathematik

WS 04/05

Blatt 10

Aufgabe 10.1

Durch Ermitteln der Nullstellen erhalten wir

$$1 - 2x + 2x^3 - x^4 = (1-x)^3(1+x) \ .$$

Wir suchen also eine Darstellung

$$\begin{aligned} 2 - 2x + 2x^2 - 2x^3 &= (Ax^2 + Bx + C)(x+1) + D(1-x)^3 \\ &= (A-D)x^3 + (B+A+3D)x^2 + (B+C-3D)x + (C+D) \ , \end{aligned}$$

und können dabei aus den sich ergebenden Gleichungen A, B, C und D wie folgt berechnen:

$$A = -1 \qquad B = 0 \qquad C = 1 \qquad D = 1 \ .$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{2 - 2x + 2x^2 - 2x^3}{1 - 2x + 2x^3 - x^4} = \frac{-x^2 + 1}{(1-x)^3} + \frac{1}{1+x}$$

Aufgabe 10.2

Wir setzen an:

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = 2 + 2x + 6x^2 + 6x^3 + \sum_{n \geq 4} a_n x^n$$

und schreiben den letzen Term rekursiv weiter um

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 4} a_n x^n &= \sum_{n \geq 4} 2a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 4} 2a_{n-3} x^n + \sum_{n \geq 4} a_{n-4} x^n \\ &= 2x \sum_{n \geq 3} a_n x^n - 2x^3 \sum_{n \geq 1} a_n x^n + x^4 \sum_{n \geq 0} a_n x^n \\ &= 2x(A(x) - 2 - 2x - 6x^2) - 2x^3(A(x) - 2) + x^4 A(x) \\ &= A(x)(2x - 2x^3 + x^4) - 4x - 4x^2 - 8x^3 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich mit Hilfe von Aufgabe 1

$$A(x) = \frac{2 - 2x + 2x^2 - 2x^3}{1 - 2x + 2x^3 - x^4} = \frac{-x^2 + 1}{(1-x)^3} + \frac{1}{1+x} = (1-x)\frac{1}{x} \cdot \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} + \frac{1}{1-(-1)x}$$

und wir können mit unserer Kenntnis über erzeugende Funktionen (siehe Tabelle 4.1) schreiben

$$
\begin{aligned}
A(x) &= (1-x)\sum_{n\geq 1} n^2 x^{n-1} - \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n \\
&= \sum_{n\geq 1} n^2 x^{n-1} \sum_{n\geq 0} n^2 x^n - \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n \\
&= 1 + 1 + \sum_{n\geq 1}\left[(n+1)^2 - n^2 + (-1)^n\right] x^n \quad .
\end{aligned}
$$

Wir erhalten dann aus dem Vorfaktor zu x^n in der Summe die explizite Darstellung der Folge für alle $n \geq 1$:

$$
a_n = (n+1)^2 - n^2 + (-1)^n = 2n + 1 + (-1)^n \quad .
$$

Aufgabe 10.3

Wir stellen zuerst fest, dass ein kürzester Pfad von $(0,0)$ nach (n,n) genau die Länge $2n$ hat und damit nur aus Schritten nach rechts und nach unten bestehen kann. Wir identifizieren einen solchen Pfad der Länge $2n$ in unserem Gitter wie folgt mit Klammerausdrücken: Einen Schritt nach unten bilden wir in eine öffnende Klammer ab einen Schritt nach rechts in eine schließende Klammer.

Damit ergibt ein gültiger Pfad, der nur in der unteren Hälfte des Gitters verläuft einen gültigen Klammerausdruck mit n öffnenden Klammern. Analog erhält man für einen Pfad der nur in der oberen Hälfte verläuft einen gültigen Klammerausdruck, wenn man bei der Abbildung die Bedeutung der Klammern vertauscht. Es ergibt sich also:

$$
\#Pfade = 2C_n = \frac{2}{n+1}\binom{2n}{n} \quad .
$$