Lösungen zu den Übungsaufgaben

Diskrete Mathematik

WS 04/05

Blatt 9

Aufgabe 9.1

Durch rekursives Einsetzen kommt man zur Vermutung $a_n = 2^{n-1}(1+a_0)$ für alle $n \geq 1$, wir beweisen dies durch vollständige Induktion über n:
Ind.-Anfang ($n=1$) : $a_1 = 1 + a_0$
Ind.-Schritt : Es gilt $a_{n+1} = 1 + \sum_{i=0}^{n} a_i = 1 + a_n + \sum_{i=0}^{n-1} = 2a_n$. Nach Ind.-Voraussetzung gilt aber $a_n = 2^{n-1}(1+a_0)$, was die Beauptung beweist.

Aufgabe 9.2

Sei a_n, die Anzahl erlaubter Teilmengen in $[n]$. Wir wählen ein Teilmenge $M \subset [n]$, die keine Zahlen mit Abstand 2 enthält, und betrachten die folgende Fallunterscheidung:

- $n \notin M$
  In diesem Fall besteht M gerade aus den gültigen Auswahlen aus $[n-1]$, d.h es gibt a_{n-1} Möglichkeiten.
- $n \in M$
  In diesem Fall gilt $n-2 \notin M$. Ist $n-1 \notin M$, so besteht M gerade aus den gültigen Wahlen aus $[n-3]$. Dafür gibt es a_{n-3} Möglichkeiten. Ist $n-1 \in M$, so gilt zusätzlich $n-3 \notin M$. M besteht in diesem Fall aus allen gültigen Wahlen $M' \subset [n-4]$ mit $M = M' \cup n-1$. Dafür existiern a_{n-4} Möglichkeiten.

Es ergibt sich also folgende lineare Rekursionsformel 4ten Grades:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4} \quad .$$

Die Anfangswerte erhält man durch abzählen:

$$\begin{aligned}
a_0 &= |\{\emptyset, \{0\}\}| = 2 \\
a_1 &= |\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}| = 4 \\
a_2 &= |\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}\}| = 6 \\
a_3 &= |\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{0,3\}\}| = 9
\end{aligned}$$

Aufgabe 9.3

a) $A(x) = \sum_{n\geq 0} x^{5n} - x\sum_{n\geq 0} x^{5n}$. Da $\sum_{n\geq 0} x^{5n}$ die formale Potenzreihe für die Folge $(1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,\ldots)$ ist, folgt nach Verschieben und der elementweisen Subtraktion, dass $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ für $a_n = (1,-1,0,0,0,1,-1,0,0,0,1,-1,\ldots)$.

b) Durch einfaches Umformen erhalten wir:

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} x^{5n} - x^{5n+1} = (1-x)\sum_{n\geq 0} (x^5)^n \quad .$$

Über die explizite Darstellung der erzeugenden Funktion der geometrischen Reihe, lässt sich $A(x)$ daher schreiben als:

$$A(x) = (1-x)\sum_{n\geq 0}(x^5)^n = \frac{1-x}{1-x^5} = \frac{1}{\sum_{n\geq 0} x^n(1-x^5)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{4} x^n} \quad .$$

Die inverse Potenzreihe lautet folglich $A^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{4} x^n$.

Aufgabe 9.4

Für die erzeugende Funktion $A(x)$, die wir suchen, gilt:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n = \left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n\right)' = A'(x) \ ,$$

und es folgt, dass $A(x)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{1-x}$ ist:

$$A(x) = \int \frac{1}{1-x}\, dx + c = \ln \frac{1}{1-x} + c \ ,$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Es muss zusätzlich $c = 0$ getlten, da $\ln \frac{1}{1-0} = 0 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} 0^n$, und die Behauptung ist bewiesen.