Lösungen zu den Übungsaufgaben

Diskrete Mathematik

WS 04/05

Blatt 8

Aufgabe 8.3

a) Wir betrachten die Menge aller möglichen Auswahlen von Ladungen, d.h $S = \{\{a_1, \dots, a_k\} \mid a_i \in [n], k \leq n\}$. Da im folgenden auch die Reihenfolge der Elemente eine Rolle spielen kann, benutzen wir die Konvention, dass die Indices eine mögliche Ordnung andeuten, d.h. a_i ist die Ladung, die zum Zeitpunkt i ausgeliefert wird.

   Eine „unabhängige“ Menge $A \in \mathcal{U} \subset S$, soll eine Auswahl von Ladungen sein, bei der alle Ladungen rechtzeitig ausgeliefert werden.

   Behauptung : Das Tupel $\mathcal{M} := (S,\mathcal{U})$ ist das gesuchte Matroid.

   Beweis : Man sieht schnell, dass $\emptyset \in \mathcal{U}$. Ist nun $B = \{b_1, \dots, b_k\} \in \mathcal{U}$ und $A \subset B$, so können wir auch alle Ladungen aus A rechtzeitig ausliefern, in dem wir die Reihenfolge der Elemente aus B übernehmen.

   Die dritte Matroideigenschaft für $(S,\mathcal{U})$ kann wie folgt gezeigt werden:
   Seien $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ und $B = \{b_1, \dots, b_l\}$ zwei gültige Auswahlen mit $k + 1 = l$, so betrachte $s_0 = \text{argmax}\{i \in [k + 1] \mid b_i \notin A\}$. Damit folgt, dass für alle $s > s_o : b_s \in A$. Dann ist auch $A \cup \{b_{s_o}\} = \{a_1, \dots, a_{s_0-1}, b_{s_0}, \dots, b_l\}$ eine gültige Auswahl. Nicht maximale unabhängige Mengen können folglich erweitert werden.

b) Um eine gültige Auswahl von Ladungen mit maximalem Nährwert zu finden, macht man sich klar, dass der Algorithmus im Buch die Aufgabenstellung lößt, wenn man als Gewichtsfunktion $w(\{a_1, \dots, a_k\}) = -\sum_{i=1}^{k} w_{a_i}$ wählt.

Aufgabe 8.4

Es lässt sich leicht einsehen, dass $\emptyset \subset \mathcal{U}$ und dass Teilgraphen kreisfreier Teilgraphen wieder kreisfrei sind.

Um die dritte Eigenschaft zu zeigen, nehmen wir an, dass ein $E_1, E_2 \in \mathcal{U}$ mit $|E_1| < |E_2|$ existiert, so dass für alle $x \in E_2 \setminus E_1$ gilt, dass $E_1 \cup \{x\} \notin \mathcal{U}$.

Da $G_1 = (V, E_1)$ kreisfrei ist, kann er als Wald aus Bäumen $E_1 = T_1 \uplus \cdots \uplus T_k$ dargestellt werden. Enthalte nun jeder Teilbaum T_i genau m_i Kanten und daher m_i+1 Knoten. Gilt nun für alle $x \in E_2 \setminus E_1$, dass $E_1 \cup \{x\} \notin \mathcal{U}$, so müssen alle Kanten aus E_2 zwischen Knoten eines Teilbaumes T_i verlaufen. Da in allen Teilbäumen aber maximal $\sum_{i=1}^{k} m_i = |E_1|$ Kanten kreisfrei angebracht werden können folgt mit $|E_2| > |E_1|$, dass E_2 im Widerspruch zur Annahme nicht kreisfrei sein kann.

$\mathcal{U}$ erfüllt folglich auch die dritte Eigenschaft eines Matroids.