Lösungen zu den Übungsaufgaben

Diskrete Mathematik

WS 04/05

Blatt 4

Aufgabe 4.2

Q_1 ist *nicht* hamiltonsch. Aussage gilt nur für $d \geq 2$.

Beweis. *Induktionsanfang $d = 2$:* Q_2 enthält den Hamiltonkreis $(00, 01, 11, 10, 00)$.

Induktionsannahme : Q_d enthält den Hamiltonkreis $(a_1, \ldots, a_{2^d}, a_1)$, wobei $a_i \in \{0,1\}^d$, $i = 1, \ldots, 2^d$.

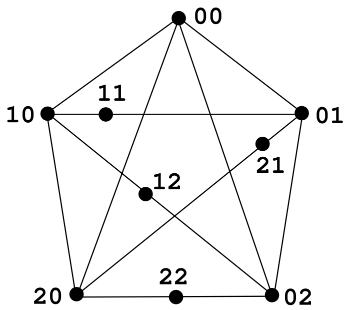
Induktionsschritt : $Q_{d+1} = (V_{d+1}, E_{d+1})$ kann dargestellt werden, durch zwei Kopien von Q_d, d.h. $V_{d+1} = V_d^0 \uplus V_d^1$, wobei $V_d^i = \{ia \mid a \in V_d\}$, $i = 0, 1$. Betrachte nun den Pfad $H = (0a_1, \ldots, 0a_{2^d}, 1a_{2^d}, 1a_1, 0a_1)$. Da nach Induktionsannahme $(0a_1, \ldots, 0a_{2^d})$ alle Knoten in V_d^0 durchläuft, ohne eine Kante doppelt zu überqueren, und $(1a_{2^d}, 1a_1)$ alle Knoten in V_d^1 durchläuft, ohne eine Kante doppelt zu überqueren, durchläuft H alle Knoten in V_{d+1} ohne eine Kante doppelt zu überqueren und ist damit ein Hamiltonkreis.

□

Aufgabe 4.3

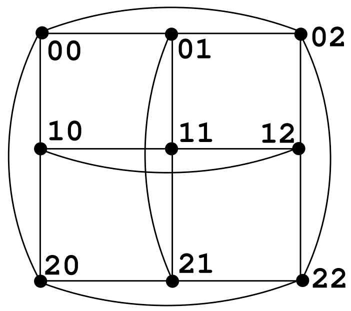
a) Jeder Knoten in $V_{s,d} = \{0, \ldots, s_1\}^d$ hat $(s-1)d$ Nachbarn. Damit ist $Q_{s,d}$ genau dann eulersch, wenn s ungerade oder d gerade ist.

b) $Q_{3,2}$ enthält die folgende Unterteilung des K_5 und ist damit nach dem Satz von Kuratowski *nicht* planar.



Aufgabe 4.4

Wir legen folgende Darstellung des $Q_{3,2}$ zu Grunde:



Die Nachbarn eines Knoten sind damit alle anderen Knoten, die in der selben Zeile bzw. in der selben Spalte stehen. Eine gültige Knotenfärbung kann dann in einer Tabelle gegeben werden, bei der in keiner Zeile/Spalte der selbe Eintrag steht:

a) Greedy-Färbung	b) Optimale-Färbung
1 2 3	1 2 3
2 1 4	2 3 1
3 4 1	3 1 2