Lösungen zu den Übungsaufgaben

Diskrete Mathematik

WS 04/05

Blatt 2

Aufgabe 2.3

Wir behandeln das Problem in Teilproblemen:

a) Wir nehmen an, die erste Ziffer unserer Zahl sei z. Wir überlegen uns nun, wieviele Möglichkeiten es gibt, mit Zahlen zwischen 1 und 9999999 die Quersumme $16 - z$ zu erreichen. Ich möchte diese im Folgenden mit $Q(z)$ bezeichnen.

b) Wir summieren dann einfach über alle möglichen Wahlen der ersten Zahl:

$$\text{Anzahl aller Zahlen} = \sum_{z=1}^{9} Q(z)$$

Um a) zu lösen, überlegen wir uns, wieviele Möglichkeiten es gibt, die Zahl $16-z$ mit 7 nicht negativen ganzen Zahlen darzustellen. Es sind

$$\binom{(16-z)+7-1}{7-1} = \binom{22-z}{6} \quad .$$

Darin sind allerdings

$$\sum_{i=10}^{16-z} \binom{((16-z)-i)+6-1}{6-1} = \sum_{i=10}^{16-z} \binom{((21-z)-i)}{5}$$

Summen enthalten, bei denen der erste Summand ≥ 10 ist. Wir können diesen Term weiter vereinfachen, in dem wir die Substitution $j = (21-z) - i$ durchführen. Wir zählen dann (in umgekehrter Reihenfolge) von $j = (21-z) - (16-z) = 5$ bis $j = (21-z) - 10 = 11 - z$. Es ergibt sich dann die folgende Anzahl:

$$\sum_{j=5}^{11-z} \binom{j}{5} \quad .$$

Diese Rechnung gilt für alle Stellen, d.h. wenn wir alle Summen entfernen, die an einer der sieben Stellen einen Summanden ≥ 10 enthalten, erhalten wir das folgende Ergebnis:

$$Q(z) = \binom{22-z}{6} - 7 \cdot \sum_{j=5}^{11-z} \binom{j}{5} \quad .$$

Wir brauchen nun nur noch einzusetzen. Es gilt für $z = 1, \ldots, 9$:

$$Q(1) = \binom{22-1}{6} - 7 \cdot \sum_{j=5}^{11-1} \binom{j}{5} = \binom{21}{6} - 7 \cdot 462 = 54264 - 3234 = 51030 \quad .$$

$$Q(2) = \binom{22-2}{6} - 7 \cdot \sum_{j=5}^{11-2} \binom{j}{5} = \binom{20}{6} - 7 \cdot 210 = 38760 - 1470 = 37290 \quad .$$

$$Q(3) = \binom{22-3}{6} - 7 \cdot \sum_{j=5}^{11-3} \binom{j}{5} = \binom{19}{6} - 7 \cdot 84 = 27132 - 588 = 26544 \quad .$$

$$Q(4) = \binom{22-4}{6} - 7 \cdot \sum_{j=5}^{11-4} \binom{j}{5} = \binom{18}{6} - 7 \cdot 28 = 18564 - 196 = 18368 \quad .$$

$$Q(5) = \binom{22-5}{6} - 7 \cdot \sum_{j=5}^{11-5} \binom{j}{5} = \binom{17}{6} - 7 \cdot 7 = 12376 - 49 = 12327 \quad .$$

$$Q(6) = \binom{22-6}{6} - 7 \cdot \sum_{j=5}^{11-6} \binom{j}{5} = \binom{16}{6} - 7 \cdot 1 = 8008 - 7 = 8001 \quad .$$

$$Q(7) = \binom{22-7}{6} - 7 \cdot \sum_{j=5}^{11-7} \binom{j}{5} = \binom{15}{6} = 5005 \quad .$$

$$Q(8) = \binom{22-8}{6} - 7 \cdot \sum_{j=5}^{11-8} \binom{j}{5} = \binom{14}{6} = 3003 \quad .$$

$$Q(9) = \binom{22-9}{6} - 7 \cdot \sum_{j=5}^{11-9} \binom{j}{5} = \binom{13}{6} = 1716 \quad .$$

Wir addieren also und erhalten also $\sum_{z=1}^{9} Q(z) = 163284$ Zahlen von 10000000 bis 99999999, die Quersumme 16 haben