Lösungen zu den Übungsaufgaben

Diskrete Mathematik

WS 04/05

Blatt 2

Aufgabe 2.3

Wir definieren für $r, n, k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i = n$ die sog. *Multinomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} := \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!}.$$

Beweise, dass es für eine Menge M der Mächtigkeit $|M| = n > 0$ und $r, k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$ genau $\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$ Möglichkeiten gibt, M in Teilmengen $M_1, \ldots, M_r$ mit $|M_i| = k_i$ geordnet zu partitionieren.

Lösung:
Wir verteilen die Elemente wie folgt auf die einzelnen Teilmengen:

- Wir wählen aus n Elementen k_1 Elemente aus und packen sie in Menge M_1 : $\binom{n}{k_1}$ Möglichkeiten.
- Wir wählen aus $n - k_1$ Elementen k_2 Elemente aus und packen sie in Menge M_2 : $\binom{n-k_1}{k_2}$ Möglichkeiten.
- Wir wählen aus $n - k_1 - k_2$ Elementen k_3 Elemente aus und packen sie in Menge M_3 : $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ Möglichkeiten.

$$\vdots$$

- Allgmein wählen wir im i-ten Schritt also aus $n - \ldots - k_{i-1}$ Elementen k_i Elemente aus und packen sie in Menge M_i : $\binom{n-\ldots-k_{i-1}}{k_i}$ Möglichkeiten.

Insgesamt haben wir also

$$\binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n-\ldots-k_{r-1}}{k_r}$$

Möglichkeiten. Wenn man die Definition von $\binom{n}{k}$ einsetzt, sieht man dass sich alle Terme in diesem Produkt bis auf

$$= \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!} = \binom{n}{k_1, \ldots, k_r}$$

wegkürzen. Da das obige Verfahren eine Möglichkeit ist, alle gesuchten Partitionen abzuzählen, folgt die Behauptung.