Wintersemester 2019/2020
Algebraische Graphentheorie

Prof. Hans Simon
Leon Barth
Abgabe: 9.1.20

10. Übungsblatt

Sei G ein zusammenhängender Graph mit $n \geq 2$ Knoten, Laplace-Matrix L und Resistenzmatrix R.

Aufgabe 10.1. Seien i, j zwei verschiedene Knoten von G, sodass $r(i, j) = d(i, j)$. Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen ij-Pfad gibt. (4 Punkte).

Aufgabe 10.2. Zeigen Sie, dass R genau einen positiven Eigenwert hat. (4 Punkte)

Hinweis: Benutzen Sie Theorem 9.12 und Lemma 9.11.

Aufgabe 10.3. Seien i und j zwei Knoten und k sei ein Schnittknoten (auch Artikulation genannt), sodass jeder ij-Pfad k enthält. Zeigen Sie, dass $r(i, j) = r(i, k) + r(k, j)$ gilt. (4 Punkte)

Aufgabe 10.4.

1. Sei e_k eine Kante von G mit Endknoten i und j. Sei $\kappa(G)$ die Anzahl der aufspannenden Bäume von G und $\kappa'(G)$ die Anzahl der aufspannenden Bäume von G, welche e_k enthalten. Zeigen Sie, dass $r(i, j) = \frac{\kappa'(G)}{\kappa(G)}$ gilt. (2 Punkte)

   Hinweis: Sie können Theorem 4.7, sowie $r(i, j) = \frac{\det(L(i,j|i,j))}{\det(L(i,i))}$ *benutzen.*

2. Sei i ein Knoten auf dem Kreis C_n. Zeigen Sie *ohne* den vorigen Aufgabenteil zu benutzen, dass $\sum_{j\sim i} r(i, j) = 2 - \frac{2}{n}$ gilt. (2 Punkte)