Wintersemester 2019/2020 | Prof. Hans Simon
Algebraische Graphentheorie | Leon Barth
Abgabe: 12.12.19

9. Übungsblatt

Sei T ein Baum mit n Knoten, Distanzmatrix D und Laplace-Matrix L.

Aufgabe 9.1. Zeigen Sie, dass $(D^{-1} - L)^{-1} = \frac{1}{3}(D + (n-1)J)$ gilt. (4 Punkte)

Aufgabe 9.2.

1. Sei $q \in \mathbb{R}$. Für $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definieren wir $[l]_q = \sum_{k=0}^{l-1} q^k = 1 + \cdots + q^{l-1}$. Sei D_q die Matrix mit Einträgen $[d(i,j)]_q$. Zeigen Sie, dass $\det D_q = (-1)^n(n-1)(1+q)^{n-2}$ gilt. (2 Punkte)

2. Sei w_i das Gewicht zu der Kante $e_i \in E(T)$. Die Distanz $d(i,j)$ zwischen zwei Knoten i und j ist definiert als die Summe der Kantengewichte des eindeutigen Pfads von i nach j. Sei D die zugehörige Distanzmatrix. Zeigen Sie, dass $\det D = (-1)^{n-1}2^{n-2}\left(\sum_i w_i\right)\prod_i w_i$ gilt. (2 Punkte)

   Hinweis: Sie können $\det\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) = \det(A - BD^{-1}C) \cdot \det D$ *benutzen.*

Aufgabe 9.3. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\det(D + \alpha J) = (-1)^{n-1}2^{n-2}(2\alpha + n - 1)$ gilt. (4 Punkte)

Aufgabe 9.4. Sei n ungerade. Zeigen Sie, dass der Wiener Index $W(T)$ gerade ist. (4 Punkte)

Hinweis: Es gilt $d(i,j) \equiv d(i,k) + d(k,j)$ *modulo* 2.