Wintersemester 2019/2020
Algebraische Graphentheorie

Prof. Hans Simon
Leon Barth
Abgabe: 5.12.19

8. Übungsblatt

Aufgabe 8.1. Sei x ein Fiedler-Vektor eines Graphen G mit genau einem Kreis, sodass $x_i \neq 0$ für alle Knoten i. Zeigen Sie, dass es höchstens zwei Kanten gibt, deren Endpunkte unterschiedliche Vorzeichen haben. (4 Punkte)

Aufgabe 8.2. Sei G ein zusammenhängender Graph mit $n = 2l$ Knoten. Sei $V_1 \cup V_2 = V$ eine disjunkte Zerlegung in zwei Knotenmengen mit jeweils l Knoten. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Kanten mit einem Endpunkt in V_1 und dem anderen Endpunkt in V_2 mindestens $\frac{\mu \cdot l}{2}$ beträgt. Zeigen Sie Gleichheit, falls G der n-Würfel ist. (4 Punkte)

Hinweis: Der n-Würfel hat als Knotenmenge $\{0,1\}^n$ und zwei Knoten sind benachbart, wenn sie sich in genau einer Koordinate unterscheiden.

Aufgabe 8.3. Sei $G \neq K_n$ ein Graph mit n Knoten und sei $V' \subset V$, sodass der von $V \setminus V'$ induzierte Graph nicht zusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass $\mu \leq |V'|$ gilt. Folgern Sie, dass $\mu \leq \delta$ gilt, wobei δ der minimale Knotengrad ist. (4 Punkte)

Aufgabe 8.4. Sei P_n der Pfad auf n Knoten.

1. Zeigen Sie, dass $\mu(P_n) < \frac{12}{n^2-1}$ gilt. (2 Punkte)

   Hinweis: Betrachten Sie den Vektor x mit $x_i = n + 1 - 2i$ für $1 \leq i \leq n$ und benutzen Sie Lemma 7.15.

2. Sei n ungerade. Zeigen Sie, dass der zentrale Knoten ein charakteristischer Knoten ist. (2 Punkte)

   Hinweis: Schauen Sie sich die Automorphismen von P_n an.