Wintersemester 2019/2020 | Prof. Hans Simon
Algebraische Graphentheorie | Leon Barth
Abgabe: 14.11.19

5. Übungsblatt

Sei G ein zusammenhängender Graph mit n Knoten und m Kanten und sei T ein aufspannender Baum von G. Wir bezeichnen mit B die fundamentale Schnitte-Matrix und mit C die fundamentale Zykel-Matrix bezüglich T.

Aufgabe 5.1. Zeigen Sie, dass $M := \left[\begin{smallmatrix} B \\ C \end{smallmatrix}\right]$ invertierbar ist. (4 Punkte)

Aufgabe 5.2. Seien $x^1, \dots, x^{n-1}$ Inzidenzvektoren von paarweise verschiedenen Schnitten von G, sodass die Matrix $X = [x^1, \dots, x^{n-1}]$ Rang $n-1$ hat. Zeigen Sie, dass die $(n-1) \times (n-1)$-Minoren von X, welche nicht verschwinden, betragsmäßig gleich sind. (4 Punkte)

Aufgabe 5.3. Sei $E \subset E(T)^c$. Wir bezeichnen mit N die Anzahl der Möglichkeiten $E^c = E(T)^c \setminus E$ zu einem Kobaum von G zu erweitern. Zeigen Sie, dass $\det CC'[E|E] = N$ gilt. (4 Punkte)

Aufgabe 5.4. Sei G planar. Wir definieren den *dualen Graphen* G^* wie folgt: G^* hat als Knotenmenge die Flächen von G. Zwei Knoten in G^* sind durch eine Kante e^* verbunden, falls die entsprechenden Flächen in G sich bei einer Kante e treffen. Die Orienterung von e^* ist so gewählt, sodass e^* bei der Fläche links von e startet. Der *duale Baum* T^* von G^* besteht aus Kanten e^* mit $e \notin T$.

1. Zeigen Sie, dass T^* ein aufspannender Baum von G^* ist. (2 Punkte)

2. Zeigen Sie, dass $C^* = B$ gilt, wobei C^* die fundamentale Zykel-matrix von G^* zu T^* ist. (2 Punkte)

Hinweis: Sie können die Formel $k = m - n + 2$ benutzen, wobei k die Anzahl der Flächen von G beschreibt.