

4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1. Sei G ein Graph mit n Knoten und m Kanten. Wir bezeichnen mit $\kappa(G)$ die Anzahl der aufspannenden Bäume von G .

1. Zeigen Sie, dass $\kappa(G) = \frac{1}{n^2} \det(L(G) + J)$ gilt. (2 Punkte)

2. Zeigen Sie, dass $\kappa(G) \leq \frac{1}{n} \left(\frac{2m}{n-1}\right)^{n-1}$ gilt. (2 Punkte)

Hinweis: Sie können folgende Ungleichung für nichtnegative Zahlen x_1, \dots, x_k ohne Beweis benutzen:

$$\sqrt[k]{x_1 \cdots x_k} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}.$$

Aufgabe 4.2. Sei G ein Graph mit n Knoten und sei λ_1 der maximale Eigenwert von $L(G)$. Zeigen Sie, dass $\lambda_1 \leq n$ gilt. (4 Punkte)

Aufgabe 4.3. Seien G und H Graphen. Beschreiben Sie $L(G \times H)$ mittels $L(G)$ und $L(H)$. Beschreiben Sie auch die Eigenwerte der Matrix $L(G \times H)$ mittels der Eigenwerte der Matrizen $L(G)$ und $L(H)$. (4 Punkte)

Aufgabe 4.4. Sei T ein Baum. Zeigen Sie, dass eine Orientierung der Kanten existiert, sodass $K(G)$ keine negativen Einträge hat. (4 Punkte).