Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Dr. G. Matthies

10. November 2004

Numerik von Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 5

Termin: Donnerstag, 25. November 2004

1. Wir betrachten das lineare Mehrschritt-Verfahren

$$\eta_{j+4} = \eta_j + \frac{h}{3}\big(8f(x_{j+3},\eta_{j+3}) - 4f(x_{j+2},\eta_{j+2}) + 8f(x_{j+1},\eta_{j+1})\big).$$

   Bestimmen Sie die Ordnung dieses Verfahrens. Ist das Verfahren konvergent?

2. Wir betrachten das allgemeine, explizite 2-Schritt-Verfahren in der Form

$$\eta_{j+2} + a_1\eta_{j+1} + a_0\eta_j = h\big(b_1 f(x_{j+1},\eta_{j+1}) + b_0 f(x_j,\eta_j)\big).$$

   a) Man bestimme b_0, b_1 und a_0 in Abhängigkeit von a_1 derart, dass das Verfahren mindestens die Ordnung 2 hat.
   b) Für welche Werte von a_1 ist das Verfahren konvergent?
   c) Welche bekannten Verfahren erhält man für $a_1 = -1$ und $a_1 = 0$?
   d) Kann a_1 so gewählt werden, dass ein stabiles Verfahren dritter Ordnung entsteht?

bitte wenden

3. Erstellen Sie Programme zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen für die folgenden Verfahren

   - modifizierte Trapez-Regel,
   - klassisches Runge-Kutta-Verfahren,
   - Adams-Bashforth-Verfahren dritter Ordnung,
   - Adams-Bashforth-Verfahren vierter Ordnung.

   Die zusätzlichen Anfangswerte für die Mehrschrittverfahren bestimmen Sie mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens.

   Wenden Sie die erstellten Programme zur Berechnung der Lösung zum angegebenen Zeitpunkt T an.

   a) $y'(t) = t\big(1+y^2(t)\big)$, $y(0)=0$, $T=1$.
   b) $y'(t) = y(t)$, $y(0)=1$, $T=2$.
   c) $y'(t) = -2y(t)$, $y(0)=10$, $T=2$.

   Verwenden Sie jeweils die Schrittweiten $h=2^{-n}$, $n=4,\ldots,8$. Bestimmen Sie aus den Werten für die beiden kleinsten Schrittweiten gemäß

   $$\log_2 \frac{|\eta(T,2^{-7})-y(T)|}{|\eta(T,2^{-8})-y(T)|}$$

   die numerische Konvergenzordnung.

   Wie verändern sich die Ergebnisse für die Mehrschritt-Verfahren, wenn zur Bestimmung der zusätzlichen Startwerte das explizite Euler-Verfahren benutzt wird.