Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Dr. G. Matthies

21. Oktober 2004

Numerik von Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 3

Termin: Donnerstag, 4. November 2004

1. Wir betrachten das AWP

$$y'(t) = \lambda\, y(t), \qquad y(0) = y_0$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass ein r-stufiges Runge-Kutta-Verfahren, das auf das obige AWP angewandt wird, die Iterationsvorschrift

$$\eta_0 = y_0, \qquad \eta_{i+1} = g(\lambda h)\eta_i, \quad i = 0, 1, \ldots$$

liefert, wobei g eine rationale Funktion ist, deren Zähler- und Nennerpolynome höchstens den Grad r haben.

b) Man zeige, dass für ein explizites Runge-Kutta-Verfahren die Funktion g ein Polynom ist.

c) Man zeige, dass ein explizites r-stufiges Runge-Kutta-Verfahren höchstens die Ordnung r haben kann.

2. Wir betrachten das Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{array}{c|cc}
\frac{3-\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{3-2\sqrt{3}}{12} \\[1ex]
\frac{3+\sqrt{3}}{6} & \frac{3+2\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} \\[1ex]
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}$$

a) Zeigen Sie, dass das obige Verfahren mindestens die Ordnung 4 hat.

b) Bestimmen Sie für das obige Verfahren die Funktion g aus Aufgabe 1.

c) Zeigen Sie, dass $|g(z)| \le 1$ für $z \in \mathbb{R}$ mit $z \le 0$ gilt.

bitte wenden

3. Ein AWP werde auf dem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ mit einem Verfahren zweiter Ordnung und der festen Schrittweite $h = (b-a)/n$ gelöst. Anschliessend wird die nur in den Gitterpunkten definierte numerische Lösung im Intervall $[a,b]$ stückweise linear interpoliert. Diese Interpolierende sei mit y_h bezeichnet. Zeigen Sie, dass

$$\|y - y_h\| := \max_{a \le x \le b} |y(x) - y_h(x)| = \mathcal{O}(h^2)$$

gilt, wenn die Lösung y des AWP aus $C^3([a,b],\mathbb{R})$ ist.

4. Für das AWP

$$z'(t) = z(t) + f\big(z(t)\big), \qquad z(0) = 1$$

betrachten wir das spezielle Einschritt-Verfahren

$$\eta_0 = z(0) = 1, \qquad \eta_{i+1} = e^h \eta_i + h f(\eta_i), \quad i = 0, 1, \ldots$$

Man zeige, dass dieses Verfahren für das obige AWP konsistent ist und bestimme die Ordnung des Verfahrens.