Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Jun.-Prof. Dr. G. Matthies

11. Juni 2008

Einführung in die Numerik
Aufgabenblatt 9

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 26. Juni 2008

1. (6 Punkte)
   Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ die üblichen Normen auf dem $\mathbb{R}^d$.

   a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die zu $\|\cdot\|_1$ gehörige Matrixnorm gerade die Spaltensummennorm ist, d.h., es gilt
   $$\|A\|_1 = \max_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|.$$

   b) (3 Punkte) Berechnen Sie bezüglich $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ jeweils die Kondition der Matrix
   $$A := \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 5 & 8 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. (5 Punkte)
   Lösen Sie mittels der Cholesky-Zerlegung das lineare Gleichungssystem
   $$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 19 \\ 17 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

3. (5 Punkte)
   Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix. Als Frobenius-Norm (oder Schur-Norm) von A definieren wir
   $$\|A\|_F := \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$
   Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

   a) (1 Punkt) $\|\cdot\|_F$ ist eine Norm auf dem Raum der $n \times n$-Matrizen.

   b) (1 Punkt) $\|AB\|_F \le \|A\|_F \, \|B\|_F$ für alle $n \times n$-Matrizen A, B.

   c) (1 Punkt) $\|\cdot\|_F$ ist nicht zu einer Vektornorm zugehörig.

   d) (1 Punkt) $\|A\|_F = sp(A^T A)^{1/2}$, wobei
   $$sp(M) := \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$$
   die Spur der Matrix M ist.

   e) (1 Punkt) $\|A\|_F = \|Q\,A\,Q^T\|_F$ für alle orthogonalen $n \times n$-Matrizen Q.