

Einführung in die Numerik Aufgabenblatt 6

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 5. Juni 2008

1. (4 Punkte)

Die Fibonacci-Folge (y_n) ist rekursiv durch

$$y_0 := 1, \quad y_1 := 1, \quad y_n := y_{n-1} + y_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

definiert. Die Folge (x_n) ist durch

$$x_n := \frac{y_{n+1}}{y_n}$$

gegeben. Untersuchen Sie die Folge (x_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

2. (4 Punkte)

Man zeige, dass die Iteration

$$x_{k+1} := \cos(x_k), \quad k \geq 0,$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen den einzigen Fixpunkt ζ mit $\zeta = \cos(\zeta)$ konvergiert.

3. (4 Punkte)

Seien $I := [-1, +1] \subset \mathbb{R}$ und $f \in C(I, \mathbb{R})$ mit $f(I) \subset I$. Zeigen Sie, dass die Funktion f mindestens einen Fixpunkt $x^* \in I$ besitzt.

4. (4 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 1$.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Folge

$$x_{i+1} := \frac{n-1}{n}x_i + \frac{a}{n x_i^{n-1}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

für jedes $x_0 \geq 1$ gegen $\sqrt[n]{a}$ konvergiert.

b) (2 Punkte) Sei nun speziell $n = 2$ und $a = 2$. Berechnen Sie unter Ausnutzung der a posteriori Abschätzung aus dem Banachschen Fixpunktsatzes mit obiger Rekursion eine Näherung y für $\sqrt{2}$ mit $|y - \sqrt{2}| \leq 10^{-4}$. Vergleichen Sie die Anzahl der benötigten Iterationen mit der Anzahl, die man nach der a priori Abschätzung des Banachschen Fixpunktsatzes erwarten würde.