

Einführung in die Numerik Aufgabenblatt 5

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 29. Mai 2008

1. (4 Punkte)

Zeigen Sie folgende Aussagen für das Romberg-Verfahren.

- a) (2 Punkte) Die Formel, die man für $T_{1,k}$ erhält, ist die zusammengesetzte Simpson-Formel für die Schrittweite $h = 2^{-k}$.
- b) (2 Punkte) Die Formel $T_{2,k}$ entspricht der zusammengesetzten Milne-Formel für die Schrittweite $h = 2^{-k}$.

2. (4 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe des Romberg-Verfahrens die Näherungen $T_{i,0}$, $i = 0, \dots, 3$, des Integrals

$$\int_0^1 x e^x dx.$$

Vergleichen Sie mit dem exakten Wert.

3. (4 Punkte)

Aus der Euler-MacLaurinschen Summenformel erhält man die Quadraturformel

$$Q(f) = \frac{1}{2} \left(f(0) + f(1) \right) - \frac{1}{12} \left(f'(1) - f'(0) \right), \quad f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}).$$

Leiten Sie hieraus eine Quadraturformel zur näherungsweise Berechnung von

$$\int_a^b g(x) dx, \quad g \in C^1([a, b], \mathbb{R})$$

her.

4. (4 Punkte)

Leiten Sie aus der Euler-MacLaurinschen Summenformel eine Quadraturformel für Funktionen $f \in C^3([0, 1], \mathbb{R})$ her, die neben den Funktionswerten auch Werte bis einschließlich der dritten Ableitungen enthält. Welche Ordnung hat diese Formel?