

Einführung in die Numerik Aufgabenblatt 11

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 10. Juli 2008

1. (8 Punkte)

Wir betrachten die Matrix-Familie

$$A(\alpha, \gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \gamma \\ 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

mit reellen Parametern α und γ .

- a) (2 Punkte) Unter welchen Bedingungen an α und γ ist $A(\alpha, \gamma)$ positiv definit?
- b) (2 Punkte) Für welche Parameter konvergiert das Jacobi-Verfahren?
- c) (2 Punkte) Für welche Parameter konvergiert das Gauß-Seidel-Verfahren?
- d) (2 Punkte) Im Falle der Konvergenz beider Verfahren bestimme man das Verfahren, dass die bessere Konvergenz sichert.

2. (8 Punkte)

Für $n \geq 2$ betrachten wir die Tridiagonalmatrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j, \\ -1, & |i - j| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Aufgabe 3 von Blatt 10 sind die Eigenwerte von A durch

$$\lambda_j = 2 - 2 \cos \left(\frac{j \pi}{n+1} \right), \quad j = 1, \dots, n,$$

gegeben.

- a) (3 Punkte) Wie groß ist, in Abhängigkeit von n , der Spektralradius der Iterationsmatrix für die Richardson-Relaxation mit optimalem Parameter?
- b) (2 Punkte) Geben Sie das asymptotische Verhalten des ermittelten Spektralradius für große n in der Form $1 - C \cdot n^\alpha$ an.
- c) (3 Punkte) Sei nun $n = 100$. Wieviele Iterationsschritte sind im Mittel durchzuführen, damit sich das Residuum um den Faktor 0.01 reduziert?