

Einführung in die Numerik Aufgabenblatt 10

Abgabe in der Vorlesung am Donnerstag, dem 3. Juli 2008

1. (3 Punkte)

Die Matrix A habe mindestens einen positiven und einen negativen Eigenwert. Zeigen Sie, dass die Richardson-Relaxation für alle Parameter $\omega \in \mathbb{C}$ divergiert.

2. (3 Punkte)

Das Spektrum $\sigma(A)$ einer Matrix A liege in einem abgeschlossenen Kreis um $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit dem Radius $r < |\mu|$. Zeigen Sie, dass die Richardson-Relaxation für den Parameter $\omega = \mu$ konvergiert.

3. (4 Punkte)

Sei $n \geq 2$ eine beliebige, aber feste natürliche Zahl. Wir betrachten die Tridiagonalmatrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha, & i = j, \\ -1, & |i - j| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiterhin ist $\vartheta := \pi/(n + 1)$. Zeigen Sie für $j = 1, \dots, n$, dass der Vektor

$$x_j := (\sin(j\vartheta), \sin(2j\vartheta), \dots, \sin(nj\vartheta))^T \in \mathbb{R}^n$$

der Eigenvektor von A zum Eigenwert

$$\lambda_j = \alpha - 2 \cos(j\vartheta)$$

ist. Welche Bedingung muss α erfüllen, damit A positiv definit ist?

4. (6 Punkte)

Schreiben Sie ein kommentiertes Programm in einer gängigen Programmiersprache zur iterativen Lösung der linearen Gleichungssysteme mit Hilfe der Richardson-Relaxation.

Führen Sie 20 Iterationsschritte der Richardson-Relaxation mit dem optimalen Parameter ω_{opt} zur näherungsweise Lösung von $Ax = b$ aus, wobei A die Matrix aus Aufgabe 3 für $n = 15$ und $\alpha = 3$ ist. Weiterhin sei $b = (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/15)^T$. Starten Sie mit $x_0 = (1, 1, \dots, 1)^T$.

Wie groß ist der optimale Parameter ω_{opt} ? Geben Sie die Lösung x^* von $Ax = b$, die Iterierte x_{20} und den Fehler von x_{20} zu x^* in der Maximumsnorm an?