

Einführung in die Numerik Aufgabenblatt 0

Keine Abgabe!!!

1. Die folgenden Ausdrücke sind so umzuformen, dass bei ihrer Berechnung Auslöschungen für den jeweils angegebenen Argumentbereich vermieden werden.

a) $\frac{1}{1+2x} - \frac{1-x}{1+x}$ für $|x| \ll 1$,

b) $\sqrt{x + \frac{1}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}}$ für $|x| \gg 1$,

c) $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$ für $x \neq 0$ und $|x| \ll 1$.

2. Man berechne mit Festkomma-Zahlen eine Näherung C für die Zahl $\cos(1)$ mit Hilfe der bekannten Taylor-Entwicklung. Wieviele Glieder und wieviele Nachkommastellen sind notwendig, damit der absolute Fehler $|\cos(1) - C|$, der die Rundungsfehler und den Abbruchfehler umfasst, kleiner als 10^{-4} wird?
3. Sei $f \in C([0, 1])$. Dann definieren wir das n -te Bernstein-Polynom der Funktion f durch

$$B_n(f; x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Berechnen Sie für die Funktionen

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^2$$

die Bernstein-Polynome.

$$\left(\text{Lösung: } B_n(f_1; x) = 1, \quad B_n(f_2; x) = x, \quad B_n(f_3; x) = \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n}x^2 \right)$$

4. Geben Sie drei Zahlen A , B und C in ihrer normalisierten Darstellung (in Bezug auf die Basis $b = 10$ und die Mantissenlänge $t = 5$) an, für die in der Maschinenrechnung das Assoziativgesetz der Addition *nicht* gilt.