Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Jun.-Prof. Dr. G. Matthies

27. April 2006

Einführung in die Numerik
Aufgabenblatt 4

Abgabe: Donnerstag, 11. Mai 2006

1. (4 Punkte)
   Sei Q eine Newton-Cotes-Formel zu $2k+1$ Knoten in $[a,b]$, die symmetrisch zum Mittelpunkt des Intervalls $[a,b]$ liegen. Zeigen Sie, dass Q sogar die Ordnung $2k+1$ hat.
   Hinweis: Wenden Sie die erste Aussage aus Satz 1.12 auf ein beliebiges Polynom q vom Grad $(2k+1)$ an und benutzen Sie weiterhin die Eigenschaften des Lagrangeschen Knotenpolynoms w.

2. (4 Punkte)
   Gegeben seien die Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Bestimmen Sie die Gewichte der zugehörigen offenen Newton-Cotes-Formel für das Integral
   $$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx.$$
   Welche Ordnung hat diese Formel?

3. (4 Punkte)
   Gegeben sind die Tschebyscheff-Polynome $T_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(n \arccos x)$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften.
   a) (1 Punkte) Es gilt für $n \in \mathbb{N}$ die Rekursionsformel $T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$.
   b) (1,5 Punkte) Die T_n sind orthogonal bezüglich des Skalarprodukts
   $$(f,g) := \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$
   c) (1,5 Punkte) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ hat T_n die globale Darstellung
   $$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right] \qquad x \in \mathbb{R}.$$

4. (4 Punkte)
   Man bestimme die Gewichte und Knoten der Gauß-Formel zum Intervall $[-1,1]$ und zur Gewichtsfunktion $1-x^2$ mit zwei Knoten. Man wende die so gewonnene Formel auf die Funktion x^4 an und vergleiche das Ergebnis mit dem exakten Wert.