Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Jun.-Prof. Dr. G. Matthies

13. April 2006

Einführung in die Numerik
Aufgabenblatt 2

Abgabe: Donnerstag, 27. April 2006

1. (4 Punkte)
   Zeigen Sie, dass für $X := C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $V := P_3$ und
   $$\ell_1(f) = f(-1), \quad \ell_2(f) = f'(-1), \quad \ell_3(f) = f'(1), \quad \ell_4(f) = f(2)$$
   das Interpolationproblem

   Finde zu $f \in X$ ein $p \in V$ mit $\ell_i(f) = \ell_i(p)$, $i = 1,2,3,4$,

   nicht wohlgestellt ist.

2. (4 Punkte)
   Sei $f(x) = \cos(x)$ gegeben. Wir betrachten die rationale Approximation
   $$r(x) = \frac{a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4}{1 + b_2 x^2},$$
   die Padé-Approximation genannt wird. Unter Verwendung der Reihenentwicklung
   $$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
   bestimme man die Koeffizienten a_0, a_2, a_4 und b_2 von r so, dass
   $$f(x) - r(x) = \gamma_8 x^8 + \gamma_{10} x^{10} + \cdots$$
   gilt.

3. (4 Punkte)
   Für die Funktion $f \in C^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist das Interpolationspolynom $H_n f \in P_n$ durch die Bedingungen
   $$(H_n f)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \qquad k = 0,\ldots,n,$$
   bestimmt. Zeigen Sie, dass
   $$(H_n f)(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j$$
   gilt. Das gesuchte Interpolationspolynom ist also das Taylor-Polynom.

bitte wenden

4. (4 Punkte)
Wir betrachten die Funktion
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
und den interpolierenden, natürlichen, kubischen Spline s zu f und den Knoten -2, -1, 0, 1 und 2. Geben Sie den Spline auf dem Intervall $[-1,0]$ an und berechnen Sie damit $s(-1/2)$.