Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Dr. G. Matthies, Dipl.-Math. M. Lipinski

9. Juni 2004

Einführung in die Numerik
Aufgabenblatt 7

Abgabe: Donnerstag, 24. Juni 2004

1. (6 Punkte)
   Gegeben ist das nichtlineare Gleichungssystem

$$x_1^3 + x_2^3 - 4 = 0, \qquad x_1^3 - x_2^3 = 0.$$

   a) (2 Punkte) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen des Gleichungssystems.

   b) (2 Punkte) Man zeige, dass das Newton-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems für jeden Startwert $x_0 \in [1,2] \times [1,2] \subset \mathbb{R}^2$ konvergiert. Dabei sei $\mathbb{R}^2$ mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ausgestattet.

   c) (2 Punkte) Ausgehend vom Startvektor $x_0 = (1,1)$ führe man zwei Iterationsschritte des Newton-Verfahrens durch.

2. (10 Punkte)
   Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $F(x) := x^2 - 2$.

   a) (2 Punkte) Man zeige, dass das Newton-Verfahren für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konvergiert.

   b) (2 Punkte) Man zeige, dass für den Startwert $x_0 = 1$ die Voraussetzungen des 3-Faktoren-Satzes nicht erfüllt sind.

   c) (2 Punkte) Man zeige, dass für den Startwert $x_0 = 2$ die Voraussetzungen des 3-Faktoren-Satzes erfüllt sind. Ausgehend von diesem Startwert berechne man mit Hilfe des Newton-Verfahrens eine Näherung von $\sqrt{2}$, die auf 4 Stellen nach dem Komma genau ist. Dabei darf die Kenntnis des genauen Wertes nicht benutzt werden.

   d) (4 Punkte) Man führe jeweils 5 Iterationen des Sekanten-Verfahrens und der Regula falsi mit den Startwerten 1 und 2 aus. Vergleichen und erklären Sie die Ergebnisse.