Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Dr. G. Matthies, Dipl.-Math. M. Lipinski

12. Juli 2004

Einführung in die Numerik
Aufgabenblatt 11

Abgabe: Donnerstag, 22. Juli 2004

1. (8 Punkte)
   Wir betrachten die Matrix-Familie

$$A(\alpha,\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \gamma \\ 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

   mit reellen Parametern α und γ.

   a) (2 Punkte) Unter welchen Bedingungen an α und γ ist $A(\alpha,\gamma)$ positiv definit?

   b) (2 Punkte) Für welche Parameter konvergiert das Jacobi-Verfahren?

   c) (2 Punkte) Für welche Parameter konvergiert das Gauß-Seidel-Verfahren?

   d) (2 Punkte) Im Falle der Konvergenz beider Verfahren bestimme man das Verfahren, dass die bessere Konvergenz sichert.

2. (8 Punkte)
   Für $n \geq 2$ betrachten wir die Tridiagonalmatrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j, \\ -1, & |i-j| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Nach Aufgabe 3 von Blatt 10 sind die Eigenwerte von A durch

$$\lambda_j = 2 - 2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right), \quad j = 1,\ldots,n,$$

   gegeben.

   a) (3 Punkte) Wie groß ist, in Abhängigkeit von n, der Spektralradius der Iterationsmatrix für die Richardson-Relaxation mit optimalem Parameter?

   b) (2 Punkte) Geben Sie das asymptotische Verhalten des ermittelten Spektralradius für große n in der Form $1 - C \cdot n^{\alpha}$ an.

   c) (3 Punkte) Sei nun $n = 100$. Wieviele Iterationsschritte sind im Mittel durchzuführen, damit sich das Residuum um den Faktor 0.01 reduziert?