Fakultät für Mathematik Ruhr-Universität Bochum

Marco Tusche

Extremwertverteilungen normierter Zuwächse von Irrfahrten mit schweren Rändern

Diplomarbeit im Fachbereich Mathematik

durchgesehene und überarbeitete Fassung

Themenstellung und Betreuung durch
Prof. Dr. Herold Dehling

Bochum, den 25. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der asymptotischen Verteilung der Teststatistiken

$$M_n^{(\gamma)} := \max_{1\leq l\leq n}\max_{0\leq k\leq n-l}\left|\frac{\sum_{i=k+1}^{k+l} X_i}{l^\gamma}\right| \quad \text{und} \quad T_n^{(\gamma)} := \max_{1\leq l< n}\max_{0\leq k\leq n-l}\left|\frac{\sum_{i=k+1}^{k+l}(X_i-\overline{X}_n)}{(l(1-\frac{l}{n}))^\gamma}\right|$$

mit $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Hierbei wird der der Fall untersucht, dass die $X_1, X_2, \ldots$ *unabhängig identisch verteilt* sind und zum Index $\alpha > 0$ *regulär variieren* , d.h.:

(1) $\frac{P[|X_1|>tx]}{P[|X_1|>t]} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} = x^{-\alpha}$ für alle $x > 0$ und

(2) es gibt $p, q \in [0,1]$ mit $p + q = 1$, so dass $\frac{P[X_1>x]}{P[|X_1|>x]} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} p$ und $\frac{P[X_1\leq -x]}{P[|X_1|>x]} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} q$.

Regulär variierende Zufallsvariablen bieten sich zur Modellierung von Prozessen an, in denen davon auszugehen ist, dass ein geringe Menge von Objekten einen erheblichen Einfluss auf die Leistung der Gesamtheit hat. Ein einfaches Beispiel für eine solche Verteilung ist die *Pareto-Verteilung*. Die Pareto-Verteilung $Par(\alpha; x_0)$ mit Parametern $\alpha, x_0 > 0$ ist gegeben durch die die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha, & \textit{falls } x \geq x_0 \\ 0, & \textit{falls } x < x_0. \end{cases}$$

Sie kommt häufig in in der realen Welt vor und findet Anwendung in der Finanz- und Versicherungsmathematik, der Wirtschaftswissenschaft und der Soziologie. Beispielsweise geht man davon aus, dass die Verteilung des privaten finanziellen Vermögens innerhalb einer Gesellschaft, die Haftpflichtschäden einer Versicherung und die Einwohnerzahl menschlicher Siedlungen einer Pareto-Verteilung folgen.

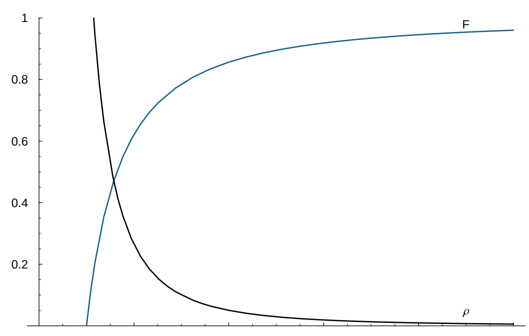


Abbildung 1: Verteilungsfunktion (blau) und Dichte (schwarz) der Pareto-Verteilung mit Parametern $x_0 = 1$, $\alpha = 1{,}4$.

Mikosch und Račkauskas konnten in ihrer Arbeit [Mikosch & Račkauskas] zeigen, dass für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid P[|X_1| > x] \leq n^{-1}\}.$$

unter relativ schwachen Voraussetzungen (siehe Theorem 3.3.1 auf Seite 113) die Konvergenzen

$$P\big[a_n^{-1} M_n^{(\gamma)} \leq x\big] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\big(-x^{-\alpha}\big) \quad \text{und} \quad P\big[a_n^{-1} T_n^{(\gamma)} \leq x\big] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\big(-x^{-\alpha}\big)$$

gelten. Im Kontext der vorliegenden Arbeit wird dieses Hauptresultat sowie die zugrundeliegende Theorie der Zufälligen Maße und Punktprozesse detailliert vorgestellt. Sie ist über das vorgestellte Problem hinaus für viele stochastische Extremwertprobleme von großer Bedeutung und wird aus diesem Grund unter relativ allgemeinen Voraussetzungen betrachtet. Dabei vereinigt und ergänzt die vorliegende Arbeit Techniken und Resultate bezüglich Zufälliger Maße und Punktprozessen aus den Büchern von Resnick [Resnick, 1987] und Kallenberg [Kallenberg, 1975] in ausführlicher Form.

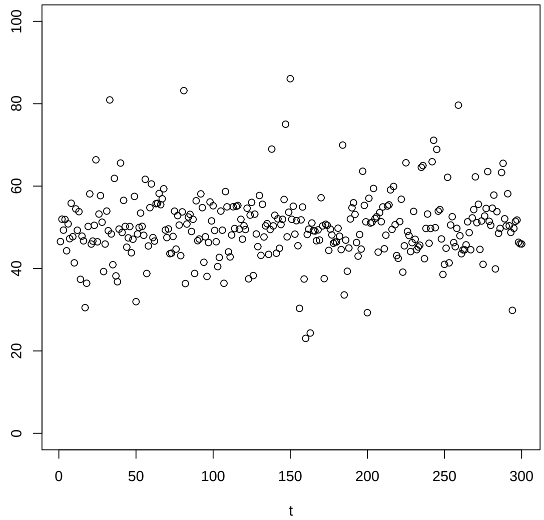
0.1 Anwendung

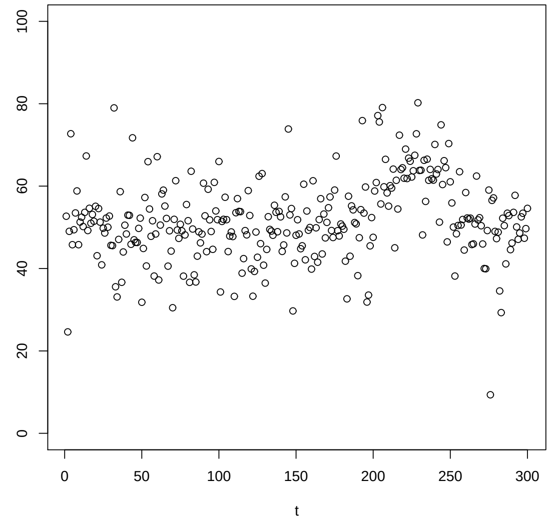
> „If in other sciences we should arrive at certainty without doubt and truth without error, it behooves us to place the foundations of knowledge in mathematics.“
>
> *Roger Bacon (1214-1292), englischer Mönch und Philosoph*

Teststatistiken der Form $T_n := T_n^{(\frac{1}{2})}$ und $M_n := M_n^{(\frac{1}{2})}$ kommen in der *Strukturbruchanalyse* (*change-point analysis*) zum Einsatz. Hierbei betrachtet man eine zeitabhängige Folge von Datenpunkten, wie zum Beispiel einen Börsenkurs, die Abfolge der täglichen Niederschlagswerte, die monatlichen Erkrankungsfälle an einer bestimmten Krankheit oder die jährliche BSP-Entwicklung eines Landes. Ziel der Strukturbruchanalyse ist ein frühzeitiges Erkennen von trendmäßigen Veränderungen innerhalb einer solchen Datenreihe.
Aufgrund von Messfehlern und andern Störfakoren ist natürlich selbst bei gleichbleibenden Bedingungen mit einer gewissen Oszillation der Daten um ihren „wahren“ Wert zu rechnen, wodurch die sichere Ermittlung einer Trendwende erschwert wird. Haben sich aber die den Daten zugrundeliegenden Mechanismen nachhaltig geändert, so spricht man von einem *Strukturbruch* (*changepoint*). Bei *Strukturbruchproblemen* geht es also darum, zu entscheiden, ab wann eine zufällige Oszillation keine ausreichend plausible Erklärung für eine konkrete Datenreihe mehr ist und man daher von der Alternative eines strukturellen Wandels ausgehen muss.
Wird der konservativen Hypothese eines gleichbleibenden Erwartungswertes der Datenpunkte die Alternative eines, möglicherweise nur zeitweiligen, Phasenübergangs (*Epidemie*) gegenübergestellt, so spricht man von einem *Strukturbruchproblem mit epidemischer Alternative.*
Ein typisches Strukturbruchproblem mit epidemischer Alternative ist das folgende: Man geht von einer Anzahl n unabhängiger Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ aus. Als Hypothese nimmt man an, dass alle X_i $(i = 1, \dots, n)$ der gleichen Verteilung folgen und einen bereits bekannten Erwartungswert μ haben:

$$H_0\textbf{:}\quad X_1 \overset{d}{=} \dots \overset{d}{=} X_n \text{ mit } \mathbb{E}(X_1) = \mu.$$

Abbildung 2: Zwei Zeitreihen. Links die Realisierung eines Zufälligen Prozesses $(X_t)_{t=\{1,\ldots,300\}}$ unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen, rechts die Realisierung eines Prozesses $(Y_t)_{t=\{1,\ldots,300\}}$ mit Strukturbruch im Bereich zwischen $t = 200$ und $t = 250$.





Dieser Hypothese wird nun die epidemische Alternative gegenübergestellt, bei der davon ausgegangen wird, dass es eine Periode (*Epidemie*) $E := \{r+1, \ldots, r+s\}$ gibt, die die X_i in zwei Klassen von jeweils identisch verteilten Zufallsvariablen aufteilt: Die erste Klasse umfasst alle X_i innerhalb der Periode ($i \in E$). Wir nehmen an, dass diese X_i einen gemeinsamen Erwartungswert $\mathbb{E}(X_{r+1}) =: \nu$ haben. Die andere Klasse umfasst die restlichen X_i ($i \notin E$), wobei wir annehmen, dass diese X_i ebenfalls einen gemeinsamen, aber von ν verschiedenen Erwartungswert $\mu := \mathbb{E}(X_r)$ bzw. $\mu := \mathbb{E}(X_{r+s+1})$ besitzen.

H_A: Es gibt Zahlen $r, s \in \mathbb{N}$, $r < s$, so dass $X_1 \stackrel{d}{=} \ldots \stackrel{d}{=} X_r \stackrel{d}{=} X_{s+1} \stackrel{d}{=} \ldots \stackrel{d}{=} X_n$ mit $\mathbb{E}(X_r)$ bzw. $\mathbb{E}(X_{r+s+1}) = \mu$, während $X_{r+1} \stackrel{d}{=} \ldots \stackrel{d}{=} X_s$ mit $\mathbb{E}(X_{r+1}) = \nu \neq \mu$.

Eine naheliegende Strategie ist, die Hypothese bei einer längeren zusammenhängenden Periode anscheinend vom Trend abweichender Werte zu verwerfen. Ist eine solche Periode nicht erkennbar, wird man die Hypothese beibehalten. Die in dieser Arbeit untersuchten Teststatistiken T_n und M_n stellen Formalisierungen dieser Überlegung dar, wobei T_n für den Fall, dass der Erwartungswert μ unbekannt ist geeignet ist, während M_n in dem Fall, dass μ bekannt ist, Verwendung findet.

0.2 Verallgemeinerte Likelihood-Quotienten

Geht man davon aus, dass eine Zufallsgröße X einer Verteilung P_ϑ mit Dichte ρ_ϑ, $\vartheta \in \Theta$, folgt, und möchte man für zwei disjunkte Mengen Θ_0 und Θ_1 mit $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ die Hypothese H_0 : „$\vartheta \in \Theta_0$“ gegen die Alternative H_1 : „$\vartheta \in \Theta_1$“ testen, so liefert in vielen Fällen der *verallgemeinerte Likelihood-Quotient*

$$\lambda(x) := \frac{\sup_{\vartheta\in\Theta_1} \rho_\vartheta(x)}{\sup_{\vartheta\in\Theta_0} \rho_\vartheta(x)}$$

eine gute Teststatistik. Häufig verwendet man nicht den Likelihood-Quotienten selber als Teststatistik, sondern bringt $\lambda(x)$ durch Verknüpfen mit einer streng wachsenden Funktion h in eine einfachere Form $T(x) := h\circ\lambda(x)$. Man sagt in diesem Fall, dass der Likelihood-Quotient monoton wachsend sei bezüglich $T(X)$, denn T hat die Eigenschaft $\lambda(x) > \lambda(x') \;\Rightarrow\; T(x) > T(x')$. Für das Testproblem ist $T(X)$ demnach eine zu $\lambda(X)$ äquivalente Statistik.

Ein Strukturbruchproblem mit epidemischer Alternative unter der Annahme unabhängig normalverteilter Summanden mit bekannter Varianz lässt sich wie folgt beschreiben:

Annahme: $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig und es gilt

$$X_i \sim \begin{cases} \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}, & \textit{falls } i \notin \{k+1,\ldots,k+l\} \\ \mathcal{N}_{\nu,\sigma^2}, & \textit{falls } i \in \{k+1,\ldots,k+l\}, \end{cases}$$

wobei $\sigma^2 > 0$ als bekannt vorausgesetzt wird. Hypothese H_0 und Alternative H_1 sind dann

$$H_0\colon\ \vartheta \in \Theta_0 := \big\{(\mu,\nu,l,k) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}_0^2 \;\big|\; \mu = \nu,\ l < n,\ k \le n-l\big\},$$

$$H_1\colon\ \vartheta \in \Theta_1 := \big\{(\mu,\nu,l,k) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}_0^2 \;\big|\; \mu \ne \nu,\ l < n,\ k \le n-l\big\}.$$

Für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ist der verallgemeinerte Likelihood-Quotient in diesem Fall

$$\lambda(x) = \frac{\sup\limits_{\vartheta\in\Theta_1}\left(\exp\Big(-(2\sigma^2)^{-1}\Big(\sum\limits_{i=1}^{k}(x_i-\mu)^2 + \sum\limits_{i=k+1}^{k+l}(x_i-\nu)^2 + \sum\limits_{i=k+l+1}^{n}(x_i-\mu)^2\Big)\Big)\right)}{\sup\limits_{\vartheta\in\Theta_0}\left((\exp\Big(-(2\sigma^2)^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\Big)\right)}\,.$$

Die Summe der Quadratischen Abweichung $\sum_{j=1}^m (y_j - m)^2$ reeller Zahlen $y_1, \ldots, y_m$ von einem gemeinsamen Wert m wird bekanntlich durch das Quadratische Mittel $m = \overline{m} := m^{-1}\sum_{j=1}^m y_j$ minimiert. Mit der Notation $s_m := \sum i = 1^m$ ergibt sich damit für den Divisor ein Maximum bei

$$\mu = \overline{x} := n^{-1}s_n.$$

Analog erhält man für feste k, l das Maximum des Dividenden bei

$$\mu = \widehat{\mu}_{k,l} := (n-l)^{-1}(s_n - s_{k+l} - s_k) \;\text{ und }\; \nu = \widehat{\nu}_{k,l} := l^{-1}(s_{k+l} - s_k).$$

Demnach ist der verallgemeinerte Likelihood-Quotient $\lambda(x)$ gleich

$$\lambda(x) = \max_{1\leq l<n} \max_{0\leq k\leq n-l} \exp\Big((2\sigma^2)^{-1}\big(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_n)^2 - \sum_{i=1}^{k}(x_i-\widehat{\mu}_{k,l})^2 + \sum_{i=k+1}^{k+l}(x_i-\widehat{\nu}_{k,l})^2 + \sum_{i=k+l+1}^{n}(x_i-\widehat{\mu}_{k,l})^2\Big),$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_n)^2 - \sum_{i=1}^{k}(x_i-\widehat{\mu}_{k,l})^2 + \sum_{i=k+1}^{k+l}(x_i-\widehat{\nu}_{k,l})^2 + \sum_{i=k+l+1}^{n}(x_i-\widehat{\mu}_{k,l})^2\\
&= -2\overline{x}_n s_n + 2\widehat{\mu}_{k,l}s_k + 2\widehat{\nu}_{k,l}(s_{k+l}-s_k) + 2\widehat{\mu}_{k,l}(s_n-s_{k+l}) + n\overline{x}_n^2 - (n-l)\widehat{\mu}_{k,l}^2 - l\widehat{\nu}_{k,l}^2\\
&= -n^{-1}s_n^2 + l^{-1}(s_{k+l}-s_k)^2 + (n-l)^{-1}(s_n-s_{k+l}+s_k)^2\\
&= \frac{l\cdot s_n^2}{n(n-l)} + \frac{n\cdot s_{k+l}^2}{l(n-l)} + \frac{n\cdot s_k^2}{l(n-l)} - \frac{2\cdot s_{k+l}s_n}{n-l} + \frac{2\cdot s_k s_n}{n-l} - \frac{2n\cdot s_k s_{k+l}}{l(n-l)}\\
&= \frac{\frac{l^2}{n^2}s_n^2 + s_{k+l}^2 + s_k^2 - \frac{2l}{n}s_{k+l}s_n + \frac{2l}{n}s_k s_n - 2s_k s_{k+l}}{l(1-\frac{l}{n})}\\
&= \left(\frac{\left|s_{k+l}-s_k-l\overline{x_n}\right|}{\sqrt{l(1-\frac{l}{n})}}\right)^2.
\end{aligned}$$

Da dieser Ausdruck für $l=n$ und $k=0$ gleich 0 ist, ergibt sich zusammenfassend

$$\lambda(x) = \max_{1\leq l\leq n} \max_{0\leq k\leq n-l} \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\left|s_{k+l}-s_k-l\overline{x_n}\right|}{\sqrt{l(1-\frac{l}{n})}}\right)^2\right).$$

Mit der streng monoton wachsenden Funktion

$$h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto\sqrt{\log(x^{2\sigma^2})}$$

erhält man schließlich

$$M_n = h\circ\lambda(X_1,\ldots,X_n),$$

d.h. der Likelihood-Quotient ist monoton wachsend bezüglich M_n.

0.3 Gliederung

Die vorliegende Arbeit teilt sich in drei sukzessive aufeinander aufbauende Themenkomplexe auf:
Kapitel 1 gibt zunächst einen Überblick über grundlegende mengentheoretisch-topologische Konzepte und Methoden (1.1). Anschließend werden hier die den wahrscheinlichkeitstheoretischen Kapiteln zugrunde liegenden, *lokal kompakten, polnischen Räume* eingeführt und ihre wichtigsten Eigenschaften vorgestellt (1.2). Das Kapitel endet mit der Diskussion eines für die Extremwerttheorie in Kapitel 3 benötigten Hilfsraumes $\acute{\mathbb{R}}^h$ (1.3).
Kapitel 2 stellt eine umfassende Einführung in die Theorie der *Zufälligen Maße* dar. Es beginnt mit einer ausführlichen Betrachtung der topologischen Strukturen auf dem Raum der *Radon-Maße* (2.2) und endet mit der Untersuchung der Konvergenz in Verteilung (2.7) Zufälliger Maße. Mit seinen Hauptaussagen, den Theoremen 2.4.1, 2.6.13 und 2.7.4, stellt dieses Kapitel das benötigte Handwerkszeug für Kapitel 3 zur Verfügung.
Das letzte Kapitel (Kapitel 3) ist dem Beweis des Satzes von Mikosch und Račkauskas gewidmet. Im ersten Abschnitt (3.1) werden die grundlegenden Konzepte und einige populäre Sätze der Theorie regulär variierender Funktionen vorgestellt. Mit Hilfe von Methoden, wie sie in der Arbeit von [Davis & Resnick, 1985] (S. 181 ff.) zum Einsatz kommen, wird anschließend in Abschnitt 3.2 ein spezielles Korollar entwickelt, welches es ermöglicht, in Abschnitt 3.3 die asymptotische Verteilung der Zufallsvariablen

$$a_n^{-1} \max_{1 \le l \le h} \max_{0 \le k \le n-l} \left| \frac{S_{k+l} - S_k}{l^\gamma} \right|$$

mit Standardtechniken der Extremwerttheorie zu berechnen. Diese Zufallsvariable entspricht einer Einschränkung von $M_n^{(\gamma)}$ auf endliche Summen-Längen. Der Satz von Karamata (Satz 3.1.13) wird es nun ermöglichen zu zeigen, dass

$$\lim_{h \to \infty} \limsup_{n \to \infty} P\left[a_n^{-1} \max_{h < l \le n} \max_{0 \le k \le n-l} \left| \frac{S_{k+l} - S_k}{l^\gamma} \right| > \delta \right] = 0$$

ist $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$, dass also Summen großer Länge asymptotisch keinen Einfluss auf die Verteilung haben. Zusammenfassend gilt damit also

$$P\Big[a_n^{-1} \max_{1 \le l \le n} \max_{0 \le k \le n-l} \Big| \frac{S_{k+l} - S_k}{l^\gamma} \Big| \le x \Big] \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} \exp\big(-x^{-\alpha}\big).$$

Zum Abschluss dieser Arbeit werden wir in Lemma 3.3.7 die Gleichheit der asymptotischen Verteilungen von M_n^γ und T_n^γ nachweisen.

0.4 Zum Beweis des Satzes von Mikosch und Račkauskas

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass $X_1, X_2, \dots$ unabhängig identisch verteilte reelle Zufallsvariablen sind und

$$a_n := \inf\bigl\{x \in \mathbb{R} \bigm| P[|X_1| > x] \le n^{-1}\bigr\}.$$

Der Satz von Mikosch und Račkauskas ist eine Folgerung aus dem Doppellemma 3.3.2, dessen erste Aussag es ist, dass für alle $\gamma \ge 0$ und $h \ge 1$ gilt:

$$P\left[a_n^{-1} \max_{1\le l\le h} \max_{0\le k\le n-l} \left|\frac{S_{k+l} - S_k}{l^\gamma}\right| \le x\right] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi_\alpha(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \qquad (*)$$

Der Beweis dieser Aussage, sowie die hierbei zum Einsatz kommenden Methoden aus der Theorie der Zufälligen Maße, stehen im Mittelpunkt dieser Arbeit. Daher sollen sie an dieser Stelle kurz umrissen werden.

Es reicht zunächst aus, sich den Raum $\acute{\mathbb{R}}^h$ als einen topologischen Raum über $\mathbb{R}^h\backslash\{0\} \cup \{\infty\}$ vorzustellen, der so konstruiert ist, dass

- eine Menge $V \subset \mathbb{R}^h\backslash\{0\}$ genau dann offen in $\acute{\mathbb{R}}^h$ ist, wenn sie offen in $\mathbb{R}^h$ (versehen mit der euklidischen Metrik) ist und in der
- eine Menge R genau dann relativ kompakt ist, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$R \subset \bigl\{x \in \acute{\mathbb{R}}^h \bigm| |x| \ge \varepsilon\bigr\}.$$

Zum Auftakt des Beweises von $(*)$ wird in Abschnitt 3.1 das (vage) Grenzmaß

$$\mu := v\text{-}\lim_{n\to\infty} nP_{a_n^{-1}X_1}\left[A \cap \mathbb{R}_0\right]$$

(auf $\acute{\mathbb{R}}$) für eine regulär variierende Zufallsvariable X zum Index α bestimmt (Satz 3.1.12). Aus den Untersuchungen Zufälliger Maße in Kapitel 2 (Satz 2.8.15) erhält man mit dieser Berechnung folgende Aussage:

(Korollar 3.2.1) *Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig identisch verteilter, zum Index α regulär variierender Zufallsvariablen auf $\acute{\mathbb{R}}$. Dann gilt die Konvergenz*

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{a_n^{-1}X_k} \overset{d}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{J_k}.$$

Dabei sind die J_k Punkte eines Poisson'schen Punkprozesses auf $\acute{\mathbb{R}}$ zum Intensitätsmaß μ.

Man beachte, dass die Notation $\overset{d}{\longrightarrow}$ hierbei die schwache Konvergenz von Punktprozessen (siehe 2.5 bis 2.7), also Zufälligen Maßen mit Werten in $\mathbb{N}_0$ bezeichnet. Theorem 2.7.4 charakterisiert die Konvergenz in Verteilung von Zufälligen Maßen ξ_n durch die endlich-dimensionale Konvergenz bestimmter „Auswertungsabbildungen“ $\bigl(\xi_n[J_1], \dots, \xi_n[J_k]\bigr)$, $k \in \mathbb{N}$, $J_i \in \mathcal{J}$ für hinreichend „feine“ und „umfangreiche“ Mengensysteme $\mathcal{J}$ (siehe 2.3 und Theorem 2.7.4). Mit

Hilfe dieses Satzes können wir unter obigen Voraussetzungen eine h-dimensionale Variante des Korollars 3.2.1 entwickeln: Bezeichnet e_j den Punkt $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, wobei die 1 an der j-ten Stelle steht, so gilt

$$\widehat{N}_n := \sum_{k=1}^{n} \delta_{a_n^{-1}(X_k,\ldots,X_{k+h-1})} \xrightarrow{d} \widehat{N} := \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{h} \delta_{J_k \mathbf{e}_i}.$$

Eine Anwendung des Satzes von der stetigen Abbildung (Satz 2.1.26) liefert schließlich:

(Korollar 3.2.4) *Es bezeichne $\boldsymbol{s}_i$ die Summe $\boldsymbol{s}_i := \sum_{j=i}^{h} \boldsymbol{e}_j$, dann gilt:*

$$N_n := \sum_{k=1}^{n} \delta_{a_n^{-1}(X_k, X_k+X_{t+1},\ldots,X_k+,\ldots,+X_{k+h-1})} \xrightarrow{d} N := \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{h} \delta_{J_k \boldsymbol{s}_i}.$$

Mit diesem Ergebnis ist es nun möglich, die asymptotische Verteilung von

$$M_n^{\leq h} := a_n^{-1} \max_{1\leq l\leq h} \max_{0\leq k\leq n-l} \left| \frac{S_{k+l}-S_k}{l^\gamma} \right|$$

zu berechnen. Hierzu setzt man

$$R_{y_1,\ldots,y_h} := \big\{(x_1,\ldots,x_h) \in \mathbb{R}^h \backslash \{0\} \,\big|\, |x_i| \leq y_i \big\}.$$

Dann ist

$$P\big[M_n^{\leq h} < x\big] = P\big[N_n[R^c_{x,2^\gamma x,\ldots,h^\gamma x}] = 0\big],$$

und mit einer weiteren Anwendung von Theorem 2.7.4 (dieses mal nutzt man die andere Richtung aus) und etwas Rechenaufwand erhält man die (punktweise) Konvergenz

$$P\big[N_n[R^c_{x,2^\gamma x,\ldots,h^\gamma x}] = 0\big] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} P\big[N[R^c_{x,2^\gamma x,\ldots,h^\gamma x}] = 0\big].$$

Aus den in Abschnitt 2.8 vorgestellten Eigenschaften eines Poisson'schen Punktprozesses und der eingangs erfolgten Berechnung von μ lässt sich abschließend

$$P\big[N[R^c_{x,2^\gamma x,\ldots,h^\gamma x}] = 0\big] = \exp\big(-x^{-\alpha}\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

berechnen.

1 Mengentheoretisch-Topologische Grundlagen

In diesem Kapitel finden sich alle rein topologischen Aussagen dieser Arbeit. Abschnitt 1.1 beschäftigt sich mit allgemeinen mengentheoretisch-topologischen Begriffen. Er soll – als Vorbereitung auf den wahrscheinlichkeitstheoretischen Teil – einen Überblick über die verwendeten topologischen Begriffe und Aussagen vermitteln. Alternativ kann dieser Abschnitt aber auch gut als Nachschlagewerk genutzt werden und gibt dem Leser so die in den späteren Kapiteln verwendeten Aussagen und Begriffe in möglichst exaktem Wortlaut an die Hand. Zu diesem Zweck finden sich in den späteren Kapiteln an allen relevanten Stellen entsprechende Verweise, sowie ein umfassendes Notations- und Indexverzeichnis auf den Seiten 141 ff.. Ein Leser mit Vorbildung im Bereich der mengenheoretischen Topologie mag diesen Abschnitt daher zunächst überspringen.
Die spezielleren (lokal kompakten) polnischen Räume werden in Abschnitt 1.2 behandelt und bilden die topologische Grundlage der für Kapitel 2 relevanten Maßräume.
Schließlich werden wir in Abschnitt 1.3 einen in Kapitel 3 benötigten, eng mit $\mathbb{R}^h$ verwandten Raum ($\acute{\mathbb{R}}^h$) einführen, der die Anwendung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Aussagen aus Kapitel 2 in Kapitel 3 ermöglichen wird. Da die Aussagen dieses Abschnittes erst in Kapitel 3 Anwendung finden, reicht es aus, sich mit diesem Kapitel nach Kapitel 2 vertraut zu machen.

1.1 Topologische Grundbegriffe

In diesem Abschnitt werden wir die allgemeineren für die Kapitel 2 und 3 relevanten Begriffe und Aussagen der mengentheoretischen Topologie zusammenzutragen. Diese werden meist zumindest für den *metrischen Raum* $\mathbb{R}^n$ bekannt sein und bilden die Grundlage der meisten Veranstaltungen über mengentheoretische Topologie. Ziel dieses Kapitels ist es vor allem, diese allgemeinen Aussagen möglichst exakt darzustellen, um so in den späteren Beweisen eine genaue Überprüfung der Voraussetzungen zu erleichtern.
Aus diesem Grund werden wir in diesem Kapitel auf die meisten Beweise verzichten. Die übergangenen Beweise sind aber für gewöhnlich recht kurz und finden sich in den meisten einführenden Büchern über mengentheoretische Topologie (zum Beispiel [Querenburg, 2001]).
Bei längeren und komplizierteren Beweisen werde ich in jedem Fall auf explizite Stellen in der Fachliteratur verweisen.

Offene, abgeschlossene und kompakte Mengen

Alle Topologie beginnt mit den Begriffen der *Offenheit* und der *Umgebung* (oder *Nachbarschaft*). Die Mengeneigenschaft der Offenheit kann als eine grundlegende Verallgemeinerung des Offenheitsbegriffes aus den bereits bekannten *metrischen Räumen* aufgefasst werden. Mit ihrer Hilfe lässt sich der Begriff der Umgebung formalisieren, der wiederum das Konzept der Nähe von der *Metrik* abkoppelt und somit auf das wesentliche reduziert. Eine Rechtfertigung dieser Betrachtungsweise besteht darin, dass es nicht nur Räume gibt, auf denen sich gar keine Metrik definieren ließe, sondern auch solche Räume, denen man die Existenz einer passenden Metrik nicht ohne weiteres ansehen kann. In diesen Fällen bleiben viele Aussagen der Topologie anwendbar und man erspart sich mühsame und unnötige Existenzbeweise.
Wir werden Offenheit als Zugehörigkeit zum Mengensystem einer Topologie – welche damit die Sammlung aller offenen Mengen wird – definieren. Eine Topologie ist dabei eine Teilmenge der Potenzmenge eines Raumes, die drei Axiomen gerecht wird: Sie enthält den gesamten Raum und die leere Menge, sie ist abgeschlossen bezüglich unendlicher (auch überabzählbarer) Vereinigungen und sie ist abgeschlossen bezüglich endlicher Schnittbildungen. Auf diesen drei Axiomen kann man schließlich das Gebäude der mengentheoretischen Topologie errichten. Zu dessen wichtigsten Stützpfeilern gehören folgende Begriffe:

(1) die Offenheit und Abgeschlossenheit und die eng mit ihnen verbundenen Begriffe des Abschlusses, des Inneren und des Randes,

(2) die Kompaktheit,

(3) die Dichtheit und Separabilität,

(4) die Stetigkeit und Homöomorphie.

Man kann sich in diesem Sinne die Topologie als Analogon zu einer *σ-Algebra* und die offenen Mengen als Entsprechung der *messbaren Mengen* vorstellen. Topologien sind aber meist von deutlicher einfacherer Struktur und die Offenheit einer Menge ist für gewöhnlich deutlich einfacher entscheidbar als ihre Messbarkeit. Im Gegenzug sind Topologien aber auch weniger „robust“; das Hinzufügen von einzelnen Punkten zum Beispiel wird in vielen Räumen eher Einfluss auf die Offenheit einer Menge als auf ihre (Borel-)Messbarkeit haben.

1.1.1 Bezeichnung Wir bezeichnen die **Potenzmenge** einer Menge X mit

$$\mathcal{P}(X) := \{A | A \subset X\} .$$

1.1.2 Definition (Topologie, topologischer Raum) Eine **Topologie auf** X ist ein Mengensystem $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:

(T1) $V_j \in \mathcal{T} \ \forall j \in J \ \Rightarrow \ \bigcup_{j \in J} V_j \in \mathcal{T}$

(T2) $n \in \mathbb{N},\ V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} V_j \in \mathcal{T}$

(T3) $\emptyset \in \mathcal{T},\ X \in \mathcal{T}$

Ein Tupel $(X, \mathcal{T})$ aus einem Raum X und einer Topologie $\mathcal{T}$ auf X heißt **topologischer Raum**.

Ähnlich wie bei σ-Algebren ist es nützlich, bestimmte, die Topologie eindeutig festlegende, Mengensysteme einzuführen. Diese sind die sogenannte Basis und Subbasis. Hierbei kann die Subbasis mit dem *Erzeugendensystem* aus der Maßtheorie verglichen werden, denn genau wie bei diesen legt ein beliebiges Mengensystem immer eine eindeutige Topologie fest, die sie selbst als Teilmenge enthält.

1.1.3 Definition (Basis, Subbasis) Eine Mengensystem $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ heißt **Basis einer Topologie** $\mathcal{T}$ auf X, falls:

$$V \in \mathcal{T} \;\Rightarrow\; V = \bigcup_{B \in \mathcal{B},\; B \subset V} B\ .$$

Man sagt dann, dass $\mathcal{B}$ die Topologie $\mathcal{T}$ erzeugt. Ein Mengensystem $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ heißt **Subbasis** einer Topologie $\mathcal{T}$, falls

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} := \{W_1 \cap \ldots \cap W_n | W_i \in \mathcal{D},\; n \in \mathbb{N}\} \cup \{X\}$$

eine **Basis** von $\mathcal{T}$ ist. Das Mengensystem $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ nennt man dann die von $\mathcal{S}$ erzeugte Basis und $\mathcal{T}$ die von von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie.

1.1.4 Satz *Es sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem mit den Eigenschaften*

(1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ und

(2) Für alle $B', B'' \in \mathcal{B}$ und $x \in B' \cap B''$ gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset B' \cap B''$.

Dann ist das Mengensystem

$$\mathcal{T} := \big\{V \in \mathcal{P}(X) \,\big|\, \forall x \in V \ \exists B \in \mathcal{B} :\ x \in B \subset V\big\}$$

eine Topologie auf X mit Basis $\mathcal{B}$. Ist $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ ein beliebiges Mengensystem auf X, so hat die von $\mathcal{S}$ erzeugte Basis $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ notwendig die Eigenschaften (1) und (2) und erzeugt auf diese Weise ebenfalls eine Topologie.

1.1.5 Definition (offene und abgeschlossene Menge) Die Elemente V einer Toplogie $\mathcal{T}$ auf X heißen **offene** Mengen (bzgl. $\mathcal{T}$). Eine Menge W heißt **abgeschlossen**, falls W^c offen ist. Ist klar, welche Topologie zu einer Menge X gehört, so spricht man auch von „Offenheit/Abgeschlossenheit in X“ anstatt „bezüglich $\mathcal{T}$“.

1.1.6 Lemma *In topologischen Räumen ist die endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen, der unendliche Schnitt ebenfalls.*

Mit Hilfe des Begriffes der Offenheit können wir nun die abstrakten Begriffe der Umgebung und der Umgebungsbasis definieren. Diese Begriffe wiederum werden bei der Definition stetiger Abbildungen als „Nähe erhaltende“ Funktionen eine wichtige Rolle spielen. Darüber hinaus hilft der Begriff der Umgebungsbasis, ähnlich wie der Begriff der Basis oder Subbasis, Topologien mit unterschiedlichen Basen als gleich oder verschieden zu identifizieren.

1.1.7 Definition (Umgebung, Umgebungsbasis) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Für einen Punkt $x \in X$ heißt eine Menge $U \subset X$ **Umgebung** von x (bezüglich $\mathcal{T}$), falls es eine offene Menge $V \in \mathcal{T}$ mit $x \in V \subset U$ gibt. Ein Mengensystem $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{P}(X)$ von Umgebungen von x bezüglich $\mathcal{T}$ heißt **Umgebungsbasis** von x bezüglich $\mathcal{T}$, falls für jede Umgebung U von x (bezüglich $\mathcal{T}$) eine Umgebung $U' \in \mathcal{U}(x)$ von x (bezüglich $\mathcal{T}$) existiert mit $U' \subset U$.
Beachte, dass die Mengen einer Umgebungsbasis, anders als bei Basen oder Subbasen, nicht notwendig offen sein müssen.

Da sich in topologischen Räumen (anders als in z.B. *metrischen Räumen*) im Allgemeinen nicht zwei verschiedene Punkte in dem Sinne voneinander „trennen“ lassen, dass sie voneinander disjunkte Umgebungen besitzen, eine derartige Eigenschaft allerdings sehr wünschenswert ist, führen wir zunächst den Begriff des Hausdorff-Raums ein:

1.1.8 Definition (Hausdorff-Raum) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **Hausdorff-Raum**, falls es für alle Paare von zwei Punkten $x, y \in X,\ x \neq y$ disjunkte Umgebungen U von x und V von y gibt.

1.1.9 Lemma *In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ ist ein Mengensystem $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ genau dann eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$, wenn gilt:*

> *Für alle $x \in X$ und für jede offenen Umgebung U von x existiert ein $B \in \mathcal{B}$ mit: $x \in B \subset U$.*

1.1.10 Bemerkung Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}$, so ist $\mathcal{U}(x) := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ eine Umgebungsbasis von $x \in X$.

Die für uns in dieser Arbeit wichtigen Topologien werden die *metrisierbaren* Topologien sein. Dies sind solche Topologien, die man aus einer Metrik gewinnen kann:

1.1.11 Definition (ε-Umgebung, Metrisierbarkeit) Es sei d eine Metrik auf X und $x_0 \in X$. Dann nennen wir für $\varepsilon > 0$

$$K_\varepsilon(x_0) := \{x \in X | d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

die **ε-Umgebung** von (oder die **ε-Kugel** um) x_0 . Wir bezeichnen die von der Basis

$$\{K_\varepsilon(x) | x \in X,\ \varepsilon > 0\}$$

erzeugte Topologie auf X mit $\mathcal{T}(d)$. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **metrisierbar**, falls es eine Metrik d auf X gibt, so dass $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$ ist.

1.1.12 Satz *Ist $(X, \mathcal{T}(d))$ ein metrischer Raum, so gilt:*

> *Eine Menge $V \subset X$ ist genau dann offen, wenn es für jeden Punkt $x \in V$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $K_\varepsilon(x) \subset V$ ist.*

Beweis. Der Satz folgt sofort aus Lemma 1.1.9 auf der vorherigen Seite. □

1.1.13 Bezeichnung In einem metrischen Raum $(X, \mathcal{T}(d))$ verwenden wir folgende intuitiven Schreibweisen:

$$\begin{aligned} d(a, B) &:= \inf\big\{d(a, b) \bigm| b \in B\big\} \\ d(A, B) &:= \inf\big\{d(a, b) \bigm| a \in A, b \in B\big\} \\ d(A) &:= \sup\big\{d(a, a') \bigm| a, a' \in A\big\}. \end{aligned}$$

Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir im mit d_2 bzw. $\|\bullet\|_2$ die euklidische Metrik

$$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ (x, y) \longmapsto \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

bzw. ihre zugehörige Norm

$$\|\bullet\|_2 : \mathbb{R}^h \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ x \longmapsto d_2(x, 0)$$

auf dem $\mathbb{R}^n$. Man beachte, dass dies einen leichten Notationsmissbrauch darstellt. Die Dimension wird aber immer aus dem Zusammenhang ersichtlich sein.

1.1.14 Lemma *Ist $\mathcal{T}(d)$ die von der Metrik d erzeugte Topologie auf X, so ist für $x \in X$*

$$\big\{K_{n^{-1}}(x) \bigm| n \in \mathbb{N}\big\}$$

eine (abzählbare) Umgebungsbasis von x bezüglich $\mathcal{T}(d)$.

1.1.15 Bezeichnung (Abschluss, Inneres, Rand) In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ mit einer Teilmenge $A \in X$ verwenden wir folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \overline{A} &:= \bigcap_{W \supset A,\ W^c \in \mathcal{T}} W \\ A^\circ &:= \bigcup_{V \subset A,\ V \in \mathcal{T}} V \\ \partial A &:= \overline{A} \backslash A^\circ \end{aligned}$$

Wir nennen $\overline{A}$ den **Abschluss**, A° das **Innere** und ∂A den **Rand** von A. Der Abschluss einer Menge A zerfällt also in den Rand ∂A und das Innere A°. Wir nennen $x \in \overline{A \backslash \{x\}}$ **Häufungspunkt**, $x \in \partial A$ **Randpunkt** und $y \in A^\circ$ **inneren Punkt**.

1.1.16 Bemerkung Der Abschluss $\overline{A}$ und der Rand ∂A einer Menge A sind abgeschlossen, ihr Inneres A° offen. Eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn jeder ihrer Häufungspunkte in der Menge selbst liegt und genau dann offen, wenn jeder ihrer Punkte ein innerer Punkt ist. Aus den *de Morgan'schen Regeln* kann man ableiten, dass weiterhin gilt

$$A^\circ = (\overline{A^c})^c.$$

1.1.17 Lemma *In einem beliebigen topologischen Raum gilt:*

(1) $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$,

(2) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B,$

(3) $\partial(A^c) = \partial(A)$,

(4) $\partial(B \backslash A) \subset \partial A \cup \partial B$.

Beweis. *(1)* und folgt aus *(2)*, *(3)* und den *de Morgan'schen Regeln*. *(4)* folgt aus *(1)* und *(3)*.

Zu *(3)*: $\partial A = \overline{A} \backslash A^\circ$ und $A^\circ = (\overline{A^c})^c$, also $\partial A = \overline{A} \cap (\overline{A^c}) = \partial(A^c)$ aus Symmetriegründen.
Zu *(2)*: $\partial(A \cup B) = \overline{(A \cup B)} \backslash (A \cup B)^\circ = \overline{(A \cup B)} \cap \overline{(A \cup B)^c} \subset (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{A^c} \cap \overline{B^c} = (\overline{A} \cap \overline{A^c} \cap \overline{B^c}) \cup (\overline{B} \cap \overline{A^c} \cap \overline{B^c}) \subset (\overline{A} \cap \overline{A^c}) \cup (\overline{B} \cap \overline{B^c}) \overset{(s.o.)}{=} \partial A \cup \partial B.$ □

Zum einfachen Umgang mit topologischen Mengen betrachten wir nun zwei wichtige Charakterisierungen offener beziehungsweise abgeschlossener Mengen:

1.1.18 Satz *In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ gilt für eine Menge $A \in X$:*

(1) $x \in \overline{A}$ genau dann, wenn für alle Umgebungen U von x $A \cap U \neq \emptyset$ ist.

(2) $x \in A^\circ$ genau dann, wenn es eine offene Menge $V \in \mathcal{T}$ gibt mit $x \in V \subseteq A$.

(3) $x \in \partial A$ genau dann, wenn für jede Umgebung U von x $A \cap U \neq \emptyset$ und $A^c \cap U \neq \emptyset$ ist.

Beweis. *(1):* „$\Rightarrow$“: Sei $x \in X$. Angenommen, es gibt eine Umgebung $U \cap A = \emptyset$, dann gäbe es auch eine offene Menge $V \subset U$ mit $x \in V \subset A^c$. Demnach wäre $\overline{A} \subset \overline{V^c} = V^c$ und somit $x \notin \overline{A}$.
„$\Leftarrow$“: Sei $x \notin \overline{A}$, dann gibt es nach Definition von $\overline{A}$ eine abgeschlossene Menge $W \supset A$ mit $x \in W^c$. Daher ist W^c eine (offene) Umgebung von x mit $W^c \cap A = \emptyset$.

(2): Nach Definition ist $x \in A^\circ$ genau dann, wenn es eine offene Menge V mit $x \in V$ und $V \subset A$ gibt. Dies ist genau die Behauptung.

(3): Da $\partial A = \overline{A} \backslash A^\circ$ ist, lässt sich diese Eigenschaft leicht aus *(1)* und *(2)* ableiten. □

1.1.19 Lemma *In einem metrischen Raum* $(X, \mathcal{T}(d))$ *gilt:*

(1) $K_\delta(x)^\circ = \{y \in X \mid d(x,y) < \delta\}$,

(2) $\overline{K_\delta(x)} \subset \{y \in X \mid d(x,y) \leq \delta\}$,

(3) $\partial K_\delta(x) \subset \{y \in X \mid d(x,y) = \delta\}$.

Beweis. *(1)*: $K_\delta(x)$ ist ein Element der Basis von $\mathcal{T}(d)$ und somit offen.

(2): Wenn $z \in \{y \in X \mid d(x,y) \leq \delta\}^c$ ist, so ist $d(z,x) > \delta$. $K_{\delta - d(x,z)}(z)$ ist eine offene Umgebung von z. Für $y \in K_{\delta - d(x,z)}(z)$ gilt

$$d(x,y) \geq d(x,z) - d(y,z) > d(x,z) - (\delta + d(x,z)) = \delta,$$

also ist $K_{\delta - d(x,z)} \subset \{y \in X \mid d(x,y) \leq \delta\}^c$, und somit ist $\{y \in X \mid d(x,y) \leq \delta\}^c$ offen (siehe Bemerkung 1.1.16 auf der vorherigen Seite). Demnach ist $\{y \in X \mid d(x,y) \leq \delta\}$ eine abgeschlossene Menge, die $K_\delta(x)$ als Teilmenge und somit auch ihren Abschluss enthält.

(3): $\partial K_\delta(x) = \overline{K_\delta(x)} \backslash K_\delta(x)^\circ$ □

Beachte, dass aus obigem Lemma folgt, dass etwa $\mathbb{Q}$ versehen mit der euklidischen Metrik $d_2(x,y) := |x - y|$ beliebig viele Mengen enthält, die gleichzeitig offen und abgeschlossen oder äquivalent unberandet sind. Diese sind zum Beispiel alle Kugeln $K_\delta(x)$ mit $x \in \mathbb{Q}$ und $\delta \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Relative Topologie

Häufig betrachtet man *Teilräume* von topologischen Räumen. Dies sind Teilmengen mit einer von dem zugrundeliegenden topologischen Raum induzierten Topologie. Dabei „erbt“ der Teilraum seine topologische Struktur in Form der sogenannten *relativen* oder **Teilraumtopologie**.

1.1.20 Definition und Satz (relative Topologie) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist $A \subset X$, so ist das Mengensystem

$$\mathcal{T}_{|A} := \{V \cap A | V \in \mathcal{T}\}$$

eine Topologie auf A. Wir nennen $\mathcal{T}_{|A}$ die **relative Topologie** oder **Teilraumtopologie** von $(X, \mathcal{T})$ auf A. Der topologische Raum $(A, \mathcal{T}_{|A})$ heißt dann **Teilraum** von $(X, \mathcal{T})$.

(Siehe [Querenburg, 2001] S. 37.)

Eine ganze Reihe wichtiger topologische Eigenschaften in Teilräumen kann direkt mithilfe der übergeordneten Topologie bewiesen werden. Das folgende Lemma zählt einige derartige Eigenschaften auf.

1.1.21 Lemma *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum $A \subset X$ und $a \in A$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) $V \subset A$ ist offen in $A \Leftrightarrow V = A \cap W$ für eine in X offene Menge W.

(2) $B \subset A$ ist abgeschlossen in $A \Leftrightarrow B = A \cap C$ für eine in X abgeschlossene Menge C.

(3) Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}$, so ist $\mathcal{B}_{|A} := \{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ eine Basis von $\mathcal{T}_{|A}$.

(4) Hat $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis, so hat auch $\mathcal{T}_{|A}$ eine abzählbare Basis.

(5) $U \subset A$ ist eine Umgebung von a in $A \Leftrightarrow U = A \cap V$ für eine Umgebung V von a in X.

(6) Ist $\mathcal{U}$ eine Umgebungsbasis von a bezüglich $\mathcal{T}$, so ist $\mathcal{U}_{|A} := \{A \cap U \mid U \in \mathcal{U}\}$ eine Umgebungsbasis von a.

(7) Hat a eine abzählbare Umgebungsbasis bezüglich $\mathcal{T}$, so hat a auch eine abzählbare Umgebungsbasis bezüglich $\mathcal{T}_{|A}$.

(8) X ist ein Hausdorff-Raum $\Rightarrow$ A ist ein Hausdorff-Raum.

(9) Ist $A \subset X$ offen in X und $V \subset A$, so ist genau dann V offen in A, wenn V offen in X ist.

(10) Ist $A \subset X$ abgeschlossen in X und $V \subset A$, so ist genau dann V abgeschlossen in A, wenn V abgeschlossen in X ist.

Kompaktheit

In allgemeinen Topologischen Räumen hat man keine Metrik und die aus der Analysis bekannte Definition beschränkter Mengen als Mengen mit beschränktem Betrag sind nicht brauchbar. Wir ersetzen den Begriff der Beschränktheit daher durch den Begriff der relativen Kompaktheit, welcher im metrischen Fall wieder mit der Beschränktheit identisch ist.
Dem Begriff der relativen Kompaktheit liegt der Begriff der Kompaktheit zugrunde. Kompakte Mengen sind vom topologischen Standpunkt aus in gewisser Weise klein. Es sind die Mengen, die, wenn man sie mit beliebig (auch überabzählbar) vielen offenen Mengen überdeckt, auch mit endlich vielen dieser Mengen als Überdeckung auskommen.
Diese Eigenschaften wird insbesondere im Kontext stetiger Abbildungen von Interesse sein, da wir sehen werden, dass Bilder (relativ) kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen selber wieder (relativ) kompakt sind, dass also topologisch „kleine“ Mengen wieder auf ebensolche abgebildet werden.
Darüber hinaus werden kompakte und relativ kompakte Mengen später bei der topologischen Konvergenz von Folgen eine nützliche Rolle spielen.

1.1.22 Definition (Kompaktheit) Eine Menge K in einem Hausdorff-Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **kompakt**, falls gilt:

$$K \subset \bigcup_{j \in J} V_j \textit{ und } V_j \in \mathcal{T} \textit{ für alle } j \in J \;\Rightarrow\; \exists n \in \mathbb{N} \textit{ und } j_1, \ldots, j_n \in J : \; K \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{j_k}$$

Kompaktheit ist eigentlich keine Eigenschaft einer Menge „in einem topologischem Raum“, wie z.B. Offenheit, sondern vielmehr die Eigenschaft eines topologischen (Teil-)Raums „an sich“. Eine Menge kann etwa zwar offen in einem Teilraum $X' \subset X$, aber zugleich nicht offen in X sein. Kompaktheit in eines Teilraums bezüglich der übergeordneten und relativen Topologie sind jedoch äquivalent:

1.1.23 Satz *In einem Hausdorff-Raum $(X, \mathcal{T})$ ist Teilmenge A genau dann kompakt, wenn der Teilraum A mit der relativen Topologie $\mathcal{T}_{|A}$ von X auf A kompakt ist.*

Die Hausdorff Eigenschaft des zugrunde liegenden Raums wird in der Literatur zwar häufig, aber nicht immer gefordert (so z.B. bei [Querenburg, 2001]). Für unsere Betrachtungen sind jedoch nur Hausdorff-Räume von Interesse, daher verwenden wir den engeren Komkaptheitsbegriff. Ohne die Hausdorff Eigenschaft wäre zum Beispiel das folgende Lemma nicht wahr:

1.1.24 Lemma *Kompakte Mengen sind abgeschlossen.*

(Siehe [Querenburg, 2001] S.107.)

1.1.25 Definition (relative Kompaktheit) Wir nennen eine Menge R in einem Hausdorff-Raum $(X, \mathcal{T})$ **relativ kompakt**, falls ihr Abschluss $\overline{R}$ kompakt ist.

1.1.26 Satz *In einem Hausdorff-Raum $(X, \mathcal{T})$ ist eine Teilmenge A einer kompakten Menge K genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist. Eine Menge $R \subset X$ ist also genau dann relativ kompakt, wenn es eine kompakte Menge K mit $R \subset K$ gibt.*

(Siehe [Querenburg, 2001] S.107.)

1.1.27 Definition Ein Hausdorff-Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **lokal kompakt**, falls jeder Punkt x in X eine kompakte Umgebung $K_x \subset E$ besitzt.

Die Alexandroff-Kompaktifizierung

Ein lokal kompakter topologischer Raum kann nach Hinzufügen eines einzelnen Punktes derart „topologisiert" werden, dass der so entstandene Raum kompakt ist und den zugrunde liegenden Raum als offenen Teilraum enthält. Den so gewonnenen Raum nennt man die *Alexandroff- oder Einpunkt-Kompaktifizierung.*

1.1.28 Definition und Satz (Alexandroff-Kompaktifizierung) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokal kompakter nicht kompakter Raum. Es sei $\widehat{X} := X \cup \{p_\infty\}$ und

$$\mathcal{K} := \left\{ \widehat{X} \backslash K \;\middle|\; K \textit{ ist kompakt in } X \right\}$$
$$\widehat{\mathcal{T}} := \mathcal{T} \cup \mathcal{K}.$$

Dann ist $\widehat{\mathcal{T}}$ eine Topologie auf $\widehat{X}$. Wir nennen $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ die **Alexandroff-** oder **Einpunkt-Kompaktifizierung** von $(X, \mathcal{T})$.

(Siehe [Querenburg, 2001] S. 110.)

1.1.29 Satz *Beachte, dass für einen lokal kompakten, nicht kompakten Raum $(X, \mathcal{T})$ mit Alexandroff-Kompaktifizierung $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ gilt:*

(1) X ist ein Hausdorff-Raum

(2) X ist offen in $\widehat{X}$,

(3) $\mathcal{T}$ und $\mathcal{K}$ sind disjunkt,

(4) $(X, \mathcal{T})$ ist ein Teilraum von $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$, d.h. $\mathcal{T}$ ist die relative Topologie von $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ auf X,

(5) $\widehat{X}$ ist kompakt,

(6) der Abschluss $\overline{X}$ von X in $\widehat{X}$ ist gleich $\widehat{X}$.

Beweis. Zu *(1)*: Wir müssen nachweisen, dass zwei verschiedene Punkte $x, y \in \widehat{X}$ disjunkte Umgebungen besitzen. Der Fall $x, y \in X$ folgt sofort daraus, dass X ein Hausdorff-Raum ist. Sei also $x \in X$ und $y \in \widehat{X} \backslash X$, d.h. $y = p_\infty$. Da X lokal kompakt ist, gibt es eine kompakte Umgebung K von x. Nach Definition von $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}})$ ist $\widehat{X} \backslash K \ni p_\infty$ offen, also eine Umgebung von p_∞.
(2) und *(3)* folgen sofort aus der Konstruktion der Alexandroff-Kompaktifizierung. *(4)* folgt daraus, dass eine in X kompakte Menge K auch abgeschlossen, also $X \backslash K$ offen in X ist. Wäre $\overline{X} \neq \widehat{X}$, so müsste $\overline{X} = X$ sein. Nach *(5)* wäre X dann aber auch kompakt, was einen Widerspruch zu den Voraussetzungen des Satzes darstellte, also gilt *(6)*. Bleibt also nur noch *(5)* zu zeigen: Sei J eine beliebige Menge, V_j für alle $j \in J$ offen in $\widehat{X}$ und

$$\widehat{X} = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

dann gibt es ein V_{j_0} mit $j_0 \in J$, so dass $p_\infty \in V_{j_0}$. Da V_{j_0} offen in $\widehat{X}$ ist, muss $V_{j_0} \in \mathcal{K}$ sein, d.h. es gibt eine in X kompakte Menge K mit $V_{j_0} = X \backslash K$. Da $K \subset X$ ist, gilt

$$K = \bigcup_{j \in J} V_j \cap X.$$

Die $V_j \cap X$ sind nach *(3)* offen in X, also gibt es $j_1, \ldots, j_n \in J$, so dass

$$\widehat{X} = V_{j_0} \cup K = V_{j_0} \cup \bigcup_{i=1}^{n} V_{j_i}$$

ist. Demnach ist $\widehat{X}$ kompakt. □

Stetigkeit

Der Begriff der *Stetigkeit* formalisiert das Konzept der „Nähe erhaltenden“ Abbildungen auch in nicht metrischen topologischen Räumen; in solchen Räumen also, in denen das Konzept von „Nähe“ durch die Umgebungen bestimmt wird. In diesem Sinne sind die *stetigen Abbildungen* also eine strukturerhaltende Klasse von Funktionen und stehen insofern in einem ähnlichen Verhältnis zu den Topologien wie die messbaren Abbildungen zu den σ-Algebren. Wir werden sehen, dass Stetigkeit auf mannigfache Weise charakterisiert werden kann. Die populärste Charakterisierung jenseits aller „Delta-Epsilontik“ ist sicherlich:

„Urbilder offener Mengen sind offen!“

1.1.30 Definition (Stetigkeit) Seien $(X, \mathcal{T}_1)$ und $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume und $x \in X$. Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt **stetig** in x, falls gilt:

Für jede Umgebung V von $f(x)$ gibt es eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$.

f heißt **stetig** auf ganz X, falls f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.

1.1.31 Lemma *Für eine stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{T}_1)$ und $(Y, \mathcal{T}_2)$ gilt*

$$\partial f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\partial B) \quad \textit{für alle } B \subset Y.$$

Beweis. Sei $x \in \partial f^{-1}(B)$ und V eine Umgebung von $f(x)$, dann gibt es nach Definition eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$. Da $x \in \partial f^{-1}(B)$ gibt es $a \in f^{-1}(B)$ $b \in f^{-1}(B)^c$ mit $a, b \in U$ (siehe Satz 1.1.18 auf Seite 14). Demnach sind $f(a), f(b) \in V$ und es gilt $f(a) \in B$, $f(b) \in B^c$. Da V beliebig gewählt war, gilt also $f(x) \in \partial B$ und daher $x \in f^{-1}(\partial B)$. □

1.1.32 Satz *Es seien $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ und $(Z, \mathcal{T}_3)$ topologische Räume. Sind $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ stetig, so ist auch $g \circ f : X \longrightarrow Z$ stetig.*

1.1.33 Satz ***(Charakterisierungen von Stetigkeit)*** *Seien $(X, \mathcal{T}_1)$ und $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Es sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) f ist stetig auf X,

(2) $f^{-1}(V)$ ist offen in X, falls V offen in Y ist,

(3) $f^{-1}(W)$ ist abgeschlossen in X, falls W abgeschlossen in Y ist,

(4) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$,

(5) Es gibt eine Subbasis $\mathcal{S}$ der Topologie $\mathcal{T}_2$ mit $f^{-1}(S) \in \mathcal{T}_1$ für alle $S \in \mathcal{S}$.

(Siehe [Querenburg, 2001] S.30.)

1.1.34 Satz *Es seien $(X, \mathcal{T}_1)$ und $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Sind $A \subset X$ und $f(A) \subset B \subset Y$ mit den relativen Topologien von $(X, \mathcal{T}_1)$ auf A bzw. $(Y, \mathcal{T}_2)$ auf B versehen, so sind auch folgende Abbildungen stetig:*

$$\begin{aligned} f_{|A} &: A \longrightarrow Y, & a &\longmapsto f(a) \\ f_{\to B} &: X \longrightarrow B, & x &\longmapsto f(x) \\ f_{|A \to B} &: A \longrightarrow B, & a &\longmapsto f(a). \end{aligned}$$

Beweis. *(1)*: Sei V offen in Y. Da $f_{|A}^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$ ist und $f^{-1}(V)$ nach Voraussetzung offen ist, ist nach Definition der relativen Topologie (Definition 1.1.20 auf Seite 16) auch $f_{|A}^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$ offen.

(2): Sei V offen in B. Dann gibt es eine in Y offene Menge $W \subset Y$ mit $V = B \cap W$. Weiterhin gilt $f_{\to B}^{-1}(V) = f_{\to B}^{-1}(B \cap W) = f_{\to B}^{-1}(W)$, denn nach Voraussetzung ist $f(A) \subset B$. Da $f_{\to B}^{-1}(W)$ offen ist, ist $f_{\to B}$ stetig.

(3): Folgt, indem man zuerst *(1)* und dann *(2)* anwendet. □

1.1.35 Satz *Ist $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen $(X, \mathcal{T}_1)$ und $(Y, \mathcal{T}_2)$, so ist das Bild $f(K)$ einer kompakten Menge $K \subset X$ kompakt in Y.*

(Siehe [Querenburg, 2001] S.108.)

Beweis. Ist J eine beliebige Menge und V_j offen für jedes $j \in J$, so dass

$$\bigcup_{j \in J} V_j \supset f(K)$$

eine offene Überdeckung von K ist, so sind die $f^{-1}(V_j)$ offen und somit

$$\bigcup_{j \in J} f^{-1}(V_j) \supset f'^{-1}(f(K)) \supset K$$

eine offene Überdeckung von K. Demnach gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $j_1, \ldots, j_n \in J$, so dass

$$\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{j_i}) \supset f^{-1}(f(K)) \supset K$$

und damit ist

$$\bigcup_{i=1}^{n} V_{j_i} \supset f\Big(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{j_i})\Big) \supset f(K)$$

eine endliche Teilüberdeckung von $f(K)$. □

1.1.36 Korollar *Ist $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung eines kompakten Raumes $(X, \mathcal{T}_1)$ in einen beliebigen topologischen Raum $(Y, \mathcal{T}_2)$, so ist das Bild $f(A)$ einer in X abgeschlossenen Menge A abgeschlossen in Y.*

Beweis. Da X kompakt ist, ist A genau dann abgeschlossen in X, wenn A kompakt ist (siehe Satz 1.1.26 auf Seite 18). Demnach ist $f(A)$ kompakt, also abgeschlossen in Y (siehe Lemma 1.1.24 auf Seite 17). □

Homöomorphie

Eine zentrale Position unter den stetigen Abbildungen nehmen die sogenannten *Homöomorphismen* ein. Dies sind die invertierbaren Elemente im Funktionenraum der stetigen Abbildungen. Damit verhalten sie sich zu den topologischen Räumen wie die Diffeomorphismen zu den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten oder die Isomorphismen zu den Vektorräumen, wobei man diese Begriffe in absteigender Reihenfolge als Verallgemeinerung voneinander auffassen kann. Im Sprachgebrauch der Kategorientheorie spricht man von den Homöomorphismen als den Isomorphismen der entsprechenden Kategorie.
Dabei ist zu beachten, dass es zwischen den meisten Räumen gar keine Homöomorphismen gibt und Homöomorphie (die Existenz eines Homöomorphismus zwischen zwei Räumen) eine Äquivalenzrelation definiert, also eine Form der topologischen Ähnlichkeit impliziert.

1.1.37 Definition (Homöomorphie) Es sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{T}_1)$ und $(Y, \mathcal{T}_2)$. Man nennt f einen **Homöomorphismus**, falls f bijektiv, stetig und außerdem die Umkehrabbildung f^{-1} von f stetig ist. Ist f ein Homöomorphismus, so schreibt man auch $f : X \xrightarrow{\approx} Y$.
Topologische Räume, zwischen denen es einen **Homöomorphismus** gibt, heißen **homöomorph** zueinander. Wir schreiben dann $(X, \mathcal{T}_1) \approx (Y, \mathcal{T}_2)$ oder – falls klar ersichtlich ist, welche Topologien die Räume tragen – $X \approx Y$. Homöomorphie ist eine Äquivalenzrelation (vgl. Satz 1.1.33).

1.1.38 Satz *Es seien $(X, \mathcal{T}_1)$ und $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ ein Homöomorphismus. Ist $A \subset X$, so ist auch*

$$f' : A \longrightarrow f(A), \; a \longmapsto f(a)$$

ein Homöomorphismus bezüglich der relativen Topologien $\mathcal{T}_{1|A}$ und $\mathcal{T}_{2|f(A)}$. Insbesondere gilt somit

$$\big(A, \mathcal{T}_{1|A}\big) \approx \big(f(A), \mathcal{T}_{2|f(A)}\big).$$

Beweis. Nach Satz 1.1.34 auf der vorherigen Seite ist f' stetig. Analog erhält man die Stetigkeit von f'^{-1}. □

1.1.39 Beispiele Einfache Homöomorphismen sind zum Beispiel Isomorphismen, Isometrien (Dreh-Spiegelungen), und Diffeomorphismen in metrischen bzw. normierten Vektorräumen. Ein populärer Homöomorphismus ist die *h-dimensionale stereografische Projektion*: Sei $\mathbb{R}^n$ versehen mit der von der euklidischen Metrik d_2 erzeugten Topologie $\mathcal{T}(d_2)$,

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid d_2(x, 0) = 1\},$$

die n-dimensionale Einheitssphäre $N = \{(0, \dots, 0, 1)\} \in \mathbb{R}^{n+}$ und $S^n \backslash N$ versehen mit der relativen Topologie $\mathcal{T}(d_2)_{|S^n \backslash N}$ von $(\mathbb{R}^{n+1}, \mathcal{T}(d_2))$ auf $S^h \backslash N$. Dann ist die Abbildung

$$F : S^n \backslash N \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (y_1, \dots, y_{n+1}) \longmapsto \Big(\frac{y_1}{1 - y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{1 - y_{n+1}}\Big)$$

stetig mit stetiger Umkehrabbildung

$$F^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n \backslash N,\ x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto \Big(\frac{2x_1}{\|x\|_2^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{\|x\|_2^2 + 1}, \frac{\|x\|_2^2 - 1}{\|x\|_2^2 + 1}\Big),$$

also ein Homöomorphismus. Insbesondere ist also $\mathbb{R}^h \approx S^h \backslash N$. Beachte, dass – da Isometrien Homöomorphismen sind – nach Satz 1.1.38 auf der vorherigen Seite gilt:

$$\mathbb{R}^n \approx S^n \backslash \{p\} \ \ \textit{für alle } p \in S^n.$$

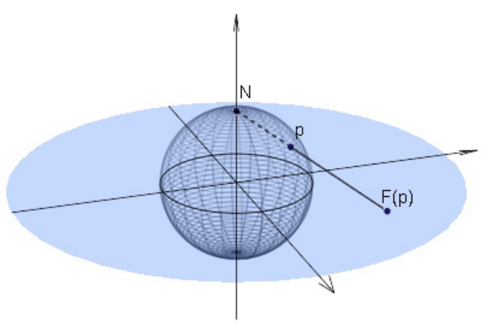


Abbildung 3: Die stereografische Projektion $S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Homöomorphismen sind topologisch gesehen höchst strukturerhaltend, das heißt, dass fast alle topologischen Eigenschaften von Mengen unter Homöomorphismen erhalten bleiben. Derartige Eigenschaften nennt man **topologische Invarianten**. Wichtige topologische Invarianten sind zum Beispiel Offenheit, Kompaktheit und Abgeschlossenheit. Genauer:

1.1.40 Satz *(wichtige topologische Invarianten)* *Seien $(X, \mathcal{T}_1)$ und $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ ein Homöomorphismus, so ist $A \subset X$ offen (abgeschlossen/kompakt/relativ kompakt/lokal kompakt) genau dann, wenn $f(A)$ offen (abgeschlossen/kompakt/relativ kompakt/lokal kompakt) in Y ist. Weiterhin ist $(X, \mathcal{T}_1)$ genau dann lokal kompakt, wenn $(Y, \mathcal{T}_2)$ lokal kompakt ist*

Beweis. Die ersten vier Aussagen lassen sich leicht aus Satz 1.1.33 folgern. Wir beweisen für diese Aussagen nur exemplarisch die Aussagen über die Invarianz relativer und lokaler Kompaktheit:

Relative Kompaktheit: „$\Rightarrow$“: Sei A relativ kompakt in X, also $\overline{A}$ kompakt in X. Dann ist, da f stetig ist, $f(\overline{A})$ kompakt in Y (Satz 1.1.35). Demnach ist $f(\overline{A})$ auch abgeschlossen, also $f(\overline{A}) = \overline{f(\overline{A})} \supset \overline{f(A)} \supset f(\overline{A})$ (vgl. Satz 1.1.33). Somit ist $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$ kompakt, das heißt $f(A)$ ist relativ kompakt.

„$\Leftarrow$“: Analog, nur dass man f und f^{-1} vertauscht.

Lokale Kompaktheit: Sei X lokal kompakt und $y \in Y$. Wähle eine kompakte Umgebung K von $f^{-1}(y)$ in X. Dann ist K° eine offene Umgebung von $f^{-1}(y)$, also $f(K^\circ) \ni y$ offen und $f(K)$ kompakt in Y. Demnach ist $f(K) \supset f(K^\circ)$ eine kompakte Umgebung von y in Y. Die Umkehrung erfolgt analog. □

1.1.41 Satz *Ist $f : X \longrightarrow Y$ ein Homöomorphismus, so ist $(X, \mathcal{T}_1)$ genau dann metrisierbar, wenn $(Y, \mathcal{T}_2)$ metrisierbar ist. Insbesondere gilt: Ist d eine Metrik auf X mit $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}(d)$, so ist*

$$d' := d \circ (f^{-1} \times f^{-1}) : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R},\ (y_1, y_2) \longmapsto\ d\big(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)\big)$$

eine Metrik auf Y mit $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}(d')$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass d' wirklich eine Metrik auf Y ist. Man zeigt dies durch einfaches Einsetzen der Definition von d' in die Axiome einer Metrik. Wir beweisen nur exemplarisch die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} & d'(y_1, y_2) \leq d'(y_1, y_3) + d'(y_3, y_2) \\ \Leftrightarrow\ & d\big(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)\big) \leq d\big(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_3)\big) + d\big(f^{-1}(y_3), f^{-1}(y_2)\big) \end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung gilt, da d nach Voraussetzung eine Metrik auf X ist und somit die Dreiecksungleichung erfüllt. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}(d')$ ist. Sei hierzu $y \in Y$ und U eine Umgebung von y, dann ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von $f^{-1}(y)$ in X und daher gibt es ein $\delta > 0$ mit $K_\delta(f^{-1}(y)) := \{x \in X | d(x, f^{-1}(y)) < \delta\} \subset f^{-1}(U)$. Demnach ist $y \in f(K_\delta(f^{-1}(y))) \subset U$ und es gilt

$$\begin{aligned} f(K_\delta(f^{-1}(y))) &= \big\{ f(x) \ \big|\ x \in X,\ d(x, f^{-1}(y)) < \delta \big\} \\ &= \big\{ y' \in Y \ \big|\ \underbrace{d(f^{-1}(y'), f^{-1}(y))}_{=d'(y',y)} < \delta \big\} \\ &=: K'_\delta(y), \end{aligned}$$

also bilden die δ-Kugeln $K'_\delta(y)$ der Metrik d' eine Basis von $\mathcal{T}_2$, d.h. $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}(d')$. □

1.1.42 Satz *Jede stetige Bijektion $f : X \longrightarrow Y$ zwischen einem kompakten Raum $(X, \mathcal{T}_1)$ und einem beliebigem topologischen Raum $(Y, \mathcal{T}_2)$ ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Nach Korollar 1.1.36 auf Seite 22 ist $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ für alle in X abgeschlossenen Mengen A abgeschlossen in Y, also ist f^{-1} stetig und damit f ein Homöomorphismus. □

1.1.43 Satz *Sei $(X, \mathcal{T}_1)$ ein lokal kompakter, nicht kompakter Raum und $(Z, \mathcal{T}_2)$ ein kompakter Raum. Es gelte weiterhin $(X, \mathcal{T}_1) \approx (Z \backslash \{z_0\}, \mathcal{T}_{2|Z\backslash\{z_0\}})$ für irgendein festes $z_0 \in Z$. Dann gilt für die Alexandroff-Kompaktifizierung $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{T}_1})$ von $(X, \mathcal{T}_1)$*

$$\widehat{X} \approx Z.$$

Beweis. Sei $f : X \longrightarrow Z\backslash\{z_0\}$ ein Homöomorphismus. Wir definieren

$$\widehat{f} : \widehat{X} \longrightarrow Z,\ x \longrightarrow \begin{cases} f(x), & \text{falls} x \in X \\ z_0, & \text{falls} x = p_\infty. \end{cases}$$

Offenbar ist $\widehat{f}$ bijektiv. Wir zeigen nun, dass $\widehat{f}$ stetig ist: Sei dazu $V \subset Z\backslash\{z_0\}$ offen ist Z. Da f stetig ist, ist $\widehat{f}^{-1}(V) = f^{-1}(V)$ offen in X und daher auch in $\widehat{X}$.
Sei $V' \subset Z$ offen in Z und $z_0 \in V'$. Da Z kompakt ist, ist auch die abgeschlossene Menge $K := Z\backslash V' \subset Z\backslash\{z_0\}$ und damit auch $f^{-1}(K)$ kompakt. Es gilt

$$\widehat{f}^{-1}(V') = \widehat{X}\backslash\widehat{f}^{-1}(K) = \widehat{X}\backslash f^{-1}(K).$$

Nach Definition der Alexandroff-Kompaktifizierung ist also $\widehat{f}^{-1}(V)$ offen in $\widehat{X}$.
Wir haben somit gezeigt, dass $\widehat{f}$ stetig ist. Aus der Kompaktheit von $\widehat{X}$ folgt damit, dass $\widehat{f}$ ein Homöomorphismus ist (vgl. (Satz 1.1.42 auf der vorherigen Seite). □

Konvergenz von Folgen

Ein weiterer zentraler Begriff der Topologie ist der Begriff der *Konvergenz* von Folgen. Zur Unterscheidung von den bereits bekannten Konvergenzbegriffen werden wir zunächst von topologischer Konvergenz sprechen. Wir werden jedoch in Kapitel 2 sehen, dass sich zum Beispiel zum Begriff der vagen Konvergenz eine geeignete Topologie finden lässt, so dass die zugehörige topologische Konvergenz mit der vagen Konvergenz übereinstimmt. Dieser Blickwinkel auf die vage Konvergenz wird dann erlauben, topologische Hilfsmittel wie zum Beispiel Kompaktheitsargumente zur Hilfe zu nehmen.

1.1.44 Definition (topologische Konvergenz) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Man sagt, x_n **konvergiert** in X gegen x, falls für jede Umgebung U von x nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $x_n \notin U$. Oder äquivalent:

$$\forall U \text{ Umgebung von } x\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ x_n \in U\ \forall n \geq n_0.$$

Konvergiert x_n gegen x, so schreiben wir $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.
Ein Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt **konvergent** in X, falls es ein $x \in X$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
In diesem Fall nennt man $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ einen **Grenzwert** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.1.45 Lemma *Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ konvergiert genau dann gegen einen Grenzwert $x \in X$, wenn für jede Teilfolge $\{n'\} \subset \{n\}$ eine Teilfolge $\{n''\} \subset \{n'\}$ existiert mit $x_{n''} \overset{n''\to\infty}{\longrightarrow} x$.*

1.1.46 Bemerkung Gibt es zu einem Punkt x in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ eine Umgebungsbasis $\mathcal{U}(x)$, so ist es für die Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gegen x hinreichend, wenn die Bedingung in Definition 1.1.44 für alle $U(x) \in \mathcal{U}(x)$ erfüllt ist.

1.1.47 Bemerkung In Hausdorff-Räumen ist der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n$ einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Falle seiner Existenz eindeutig bestimmt.

1.1.48 Definition (Vollständigkeit) Sei d eine Metrik auf einer Menge X. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Cauchy-Folge** (bezüglich d), falls gilt:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n > N$ gilt $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Die Metrik d heißt **vollständig**, falls jede d-Cauchy-Folge bezüglich $\mathcal{T}(d)$ konvergiert. Ein Topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt vollständig metrisierbar, falls es eine vollständige Metrik d auf X gibt, so dass $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$ ist.
Beachte, dass Vollständigkeit eine Eigenschaft einer Metrik und nicht eines topologischen Raumes ist. Es kann durchaus Metriken d und d' mit $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}(d')$ auf einer Menge X geben, so dass bezüglich d' nicht jede Cauchy-Folge konvergiert, bezüglich d aber sehr wohl (vgl. etwa [Billingsley, 1968] S. 111 f.).

1.1.49 Satz *Vollständige Metrisierbarkeit ist eine topologische Invariante.*

Beweis. Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein Homöomorphismus zwischen dem Raum $(X, \mathcal{T}(d))$ mit vollständiger Metrik d und dem topologischen Raum $(Y, \mathcal{T})$. Nach Satz 1.1.41 auf Seite 24 ist dann $d' := d \circ (f^{-1} \times f^{-1})$ eine Metrik auf Y, so dass $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d')$ ist. Wir zeigen nun, dass d' vollständig ist:
Sei hierzu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich d', so gilt nach Definition einer Cauchy Folge, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$d(f^{-1}(y_m), f^{-1}(y_n)) < \varepsilon \;\; \textit{für alle } m, n > N.$$

Demnach ist $\left(f^{-1}(y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge bezüglich d, also konvergent gegen ein x in X. Da f folgenstetig ist, folgt nun sofort, dass $f(f^{-1}(y_n)) = y_n$ gegen $f(x)$ konvergiert. □

Es wurde erwähnt, dass Kompaktheit ein nützliches Hilfsmittel für die Konvergenz von Funktionenfolgen ist. Wir präzisieren dies in folgendem Satz:

1.1.50 Satz *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in X konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, so ist die Menge $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompakt. Insbesondere ist also $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt.*
Ist $(X, \mathcal{T})$ polnisch, so gilt andersherum auch, dass jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einer kompakten Teilmenge $K \in X$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $\lim_{n'\to\infty} x'_n \in K$ besitzt.

(Siehe [Querenburg, 2001] S.106.)

Konvergenz lässt sich demnach nachweisen, indem man die Gleichheit der Grenzwerte aller konvergenten Teilfolgen beweist (vgl. Lemma 1.1.45 auf der vorherigen Seite).
Eine wichtige Anwendung des Konvergenzbegriffs findet sich bei dem Nachweis der Stetigkeit einer Abbildung in zumindest metrisierbaren Räumen:

1.1.51 Definition (Folgenstetigkeit) Es seien $(X, \mathcal{T}_1)$ und $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Eine Funktion f heißt **folgenstetig** in $x \in X$, falls gilt:

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \;\Rightarrow\; f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

Ist f in jedem Punkt $x \in X$ folgenstetig, so heißt f folgenstetig (auf X).

1.1.52 Satz *Sei $(X, \mathcal{T}_1)$ ein topologischer Raum, so dass jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Dann ist eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ in einen weiteren topologischen Raum $(Y, \mathcal{T}_2)$ genau dann stetig, wenn sie folgenstetig ist.*
Beachte, dass es ist einem Raum X mit abzählbarer Basis $\mathcal{B}$ für jeden Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{U}(x) := \big\{B \in \mathcal{B} \;\big|\; x \in \mathcal{B}\big\}$ gibt.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $x_n \longrightarrow x$ und V eine Umgebung von $f(x)$. Da f stetig ist, gibt es eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$. Da $x_n \longrightarrow x$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$ und somit gilt $f(x_n) \in f(U) \subset V$ für alle $n \geq n_o$. Also ist f folgenstetig.

„$\Leftarrow$“: Wir beweisen $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ (vgl. Satz 1.1.33 auf Seite 20). Dazu zeigen wir zunächst, dass es für jedes x in $\overline{A}$ eine Folge $a_n \longrightarrow x$ mit $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt:

Sei $\mathcal{U}(x) = \big\{U_i \;\big|\; i \in \mathbb{N}\big\}$ eine Umgebungsbasis von x. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $U_n \subset U_{n+1}$ ist (sonst setze $U'_n := \bigcap_{i=1}^n U_n$). Da $x \in \overline{A}$ ist $U_n \cap A \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in U_n \cap A$ aus. Dann liegen für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ alle a_n mit $n \geq n_0$ in U_{n_0}. Da $\mathcal{U}(x)$ ist eine absteigende Umgebungsbasis von x ist, gibt es für jede Umgebung V von x ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_n \subset V$, für alle $n \geq n_0$ und somit $a_n \in V$ für alle $n \geq n_0$. Also $a_n \longrightarrow x$.
Nach Voraussetzung gilt nun: $\underline{f(a_n)} \longrightarrow f(x)$ und somit gibt es in jeder Umgebung von $f(x)$ Punkte aus $f(A)$, also ist $x \in \overline{f(A)}$. Damit ist die Stetigkeit bewiesen. $\square$

Topologische Produkträume

Wie in vielen Bereichen der Mathematik lässt sich auch in der mengentheoretischen Topologie ein „Produkttypus“ der Räume ihres Interesses – der Produktraum mit der Produkttopologie – definieren. Somit lassen sich topologische Eigenschaften von Mengen und Abbildungen in oder aus dem Produktraum auf topologische Eigenschaften ihrer einzelnen Komponenten zurückführen. Besonders fruchtbar ist dieser Ansatz in Kombination mit Homöomorphismen, denn Produkträume lassen sich oft einfacher verstehen als mach andere Vertreter ihrer Homöomorphieklasse. Bestimmte Eigenschaften – etwa beliebige topologische Invarianten – können also unter Umständen mit geringerem Aufwand im homöomorphen Produktraum bewiesen und anschließend vía Umkehrabbildung auf den Ursprungsraum zurückübertragen werden. Ein wichtiges Beispiel hierfür ist der Satz von Tychonoff, der Kompaktheit auch in überabzählbaren Produkten topologischer Räume charakterisiert.

1.1.53 Definition (Produkttopologie) Es seien $(X_i, \mathcal{T}_i),\ i \in I$ eine Familie topologischer Räume. Für $j \in I$ bezeichnen wir mit

$$\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_j,\ (x_i)_{i \in I} \longmapsto x_j$$

die Projektion auf X_j. Die Topologie zur Subbasis

$$\mathcal{S} := \left\{ \pi_k^{-1}(V_i) \;\middle|\; i \in I,\ V_i \in \mathcal{T} \right\}$$

heißt **Produkttopologie** $\mathcal{T}_i^{\otimes I}$ auf $\prod_{i \in I} X_i$. $(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{T}_i^{\otimes I})$ heißt der **topologischer Produktraum** von $(X_i, \mathcal{T}_i),\ i \in I$. Ist $(X_i, \mathcal{T}_i) = (X, \mathcal{T})$ für alle $i, \in I$, so schreiben wir auch $(X^I, \mathcal{T}^I)$ für den entsprechenden Produktraum.

1.1.54 Bemerkung Für einen topologischen Produktraum $(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{T}_i^{\otimes I})$ ist die Abbildung $\pi_j : \prod\limits_{i \in I} X_i \longrightarrow X_j,\ (x_i)_{i \in I} \longmapsto x_j$ für jedes $j \in I$ stetig.

Beweis. $V \in \mathcal{T}_j \Rightarrow \pi_j^{-1}(V_j) \in \mathcal{S} \subset \mathcal{T}_i^{\otimes I}$. □

1.1.55 Lemma *Ist $(X_j, \mathcal{T}(d_j)),\ j \in J$ eine Familie metrischer Räume und $X = \prod_{j \in J} X_i$, so ist das Mengensystem*

$$\mathcal{V}(x) := \left\{ \bigcap_{i=1}^{k} \{ y \in X \mid d_{j_i}(\pi_{j_i}(y), \pi_{j_i}(x)) < \varepsilon \} \;\middle|\; \varepsilon > 0,\ k \in \mathbb{N},\ j_1, \dots j_k \in J \right\}$$

eine Umgebungsbasis von $x \in X$ bezüglich $\mathcal{T}(d_j)^{\otimes J}$.

Beweis. Sei $x \in U$ und $U \subset X$ offen. Nach Definition der Produkttopologie gibt es dann ein $k \in \mathbb{N}$, Indizes $j_1, \dots, j_k \in J$ und offene Mengen $V_{j_i} \in X_{j_i}$, so dass

$$x \in \bigcap_{i=1}^{k} \pi_{j_i}^{-1}(V_{j_i}) \subset U.$$

Also liegt $x_{j_i} := \pi_{j_i}(x)$ für alle $i = 1, \dots, k$ in einer offenen Menge $V_{j_i} \subset X_{j_i}$. Da die $(X_j, \mathcal{T})$ für alle $j \in J$ metrisch sind, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$K_{\varepsilon, j_i}(x_{j_i}) := \left\{ y \in X_{j_i} \;\middle|\; d_{j_i}(x_{j_i}, y) < \varepsilon \right\} \subset V_{j_i}$$

für alle $i = 1, \dots, k$. Damit ist

$$x \in \underbrace{\bigcap_{i=1}^{k} \pi_{j_i}^{-1}\big(K_{\varepsilon, j_i}(x_{j_i})\big)}_{\in \mathcal{V}(x)} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{j_i}^{-1}(V_{j_i}) \subset U.$$

□

1.1.56 Satz ***(komponentenweise Stetigkeit)*** *Eine Abbildung $g : Y \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i$ eines topologischen Raumes $(Y, \mathcal{T})$ in einen topologischen Produktraum $(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{T}_i^{\otimes I})$ ist genau dann stetig, wenn für jedes $j \in I$ die Abbildung $g_j := \pi_j \circ g : Y \longrightarrow X_j$ stetig ist.*

Beweis. „$\Leftarrow$“: Gemäß Satz 1.1.33 auf Seite 20 reicht es, zu zeigen, dass die Urbilder der Elemente der Subbasis $\mathcal{S}$ offen in Y sind: $V \in \mathcal{S} \Rightarrow V = \pi_k^{-1}(V_k)$ für ein $k \in I$ und $V_k \in \mathcal{T}_k$ und somit $g^{-1}(V) = g^{-1}(\pi_k^{-1}(V_k)) \in \mathcal{T}$ nach Voraussetzung.

„$\Rightarrow$“: folgt sofort aus Bemerkung 1.1.54 □

1.1.57 Beispiel Ist d eine Metrik auf X und A eine beliebige Teilmenge von X, so sind die Abbildungen

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, x_2) \longmapsto d(x_1, x_2)$$

und

$$f_A : X \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto d(x, A)$$

stetig.

Beweis. Wir weisen komponentenweise Stetigkeit in der ersten Komponente nach. Wir betrachten also für fixiertes $x_0 \in X$ die Abbildung

$$f := d(\bullet, x_0) : X \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto d(x, x_0).$$

Ist U eine Umgebung von $f(x)$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subset U$. $K_\varepsilon(x)$ ist eine offene Umgebung von x und $f(K_\varepsilon(x)) \subset (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$, denn $y \in K_\varepsilon(x)$ genau dann, wenn $d(y,x) < \varepsilon$ und damit

$$\begin{aligned} f(y) &= d(y, x_0) \leq d(x,y) + d(x,x_0) < \varepsilon + d(x,x_0) \text{ und} \\ f(y) &= d(y,x_0) > d(y,x_0) + \underbrace{d(x,y) - \varepsilon}_{<0} \geq d(x,x_0) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Der Beweis für die zweite Komponente ist identisch. Also ist d (komponentenweise) stetig.

Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$d(x,a) - d(x,y) \quad \leq \quad d(y,a) \quad \leq \quad d(x,a) + d(x,y)$$

für alle $x, y \in X$, $a \in A$. Demnach gilt

$$\begin{array}{cccccc} & \inf\limits_{a\in A}(d(x,a)-d(x,y)) & \leq & \inf\limits_{a\in A}(d(y,a)) & \leq & \inf\limits_{a\in A}(d(x,a)+d(x,y)) \\ \Leftrightarrow & d(x,A) - d(x,y) & \leq & d(y,A) & \leq & d(x,A) + d(x,y). \end{array}$$

Ist also $x \in X$, $\varepsilon > 0$ und $y \in X$ mit $d(y,x) < \varepsilon$ so ist

$$f_A(y) = d(y,A) \in (d(x,A) - \varepsilon, d(x,A) + \varepsilon) \;\Rightarrow\; |f_A(x) - f_A(y)| < \varepsilon,$$

d.h. f_A ist stetig auf X. □

1.1.58 Korollar *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein metrischer Raum und sind $K \in X$ kompakt und $A \in X$ abgeschlossen mit $A \cap K = \emptyset$, so ist*

$$d(K,A) > 0.$$

Beweis. Sei $k \in K \subset A^c$. Da A^c offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $K_\varepsilon(k) \subset A^c$ und somit $d(k,A) := \inf\{d(k,a) \mid a \in A\} \geq \varepsilon$. Sei f die stetige Abbildung $f := d(\bullet, A) : K \longrightarrow R$, dann ist $f > 0$. Da K kompakt ist, ist außerdem $f(K)$ kompakt, also abgeschlossen und daher gibt es ein $0 < b \leq c \in \mathbb{R}^+$so dass $f(K) \subset [b,c]$. □

1.1.59 Satz *(Satz von Tychonoff)* *Ein nicht leerer Produktraum $\prod_{i\in I}$ ist genau dann kompakt, wenn X_i für jedes $i \in I$ kompakt ist.*

(Siehe [Querenburg, 2001] S.109.)

1.2 Polnische Räume

Im Fokus wahrscheinlichkeitstheoretischen Interesses (und insbesondere unserer Betrachtungen in Kapitel 2) stehen für gewöhnlich die so sogenannten polnischen Räume. Polnische Räume sind in mehrerer Hinsicht einfache Räume: Sie sind vollständig metrisierbar, was uns das Hilfsmittel der Metrik für topologische Beweise an die Hand gibt. Weiterhin sind sie separabel, was im Wesentlichen bedeutet, dass die Topologie in einer gewissen Weise „klein" ist. In polnischen Räumen bedeutet Separabilität sogar, dass sich offene Mengen als abzählbare Vereinigung von (eventuell einfacher zu handhabenden) Basiselementen darstellen lassen.
Als Hauptaussagen dieses Abschnittes können die drei Aussagen aus Lemma 1.2.5 betrachtet werden, auf die wir in Kapitel 2 immer wieder zurückgreifen werden.

1.2.1 Definition (separable und polnische Räume) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **separabel**, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt, d.h., falls ein $A \subset X$ existiert mit:

(1) A ist abzählbar und

(2) $\overline{A} = X$.

Ist $(X, \mathcal{T})$ separabel und vollständig metrisierbar, so nennt man $(X, \mathcal{T})$ einen **polnischen Raum**.

1.2.2 Beispiel $\mathbb{R}^n$ versehen mit der euklidischen Metrik $d_2(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ ist ein polnischer Raum.

Beweis. Wir müssen natürlich nur die Separabilität nachweisen. Wir wählen $A = \mathbb{Q}^h$. Da wir wissen, dass $\mathbb{Q}^h$ dicht in $\mathbb{R}^h$ liegt und da $\mathbb{Q}^h$ abzählbar ist, folgt die Behauptung. □

1.2.3 Lemma *Ein metrisierbarer Raum $(X, \mathcal{T}(d))$ ist genau dann separabel, wenn es eine abzählbare Basis der Topologie $\mathcal{T}$ gibt.*

Beweis. „$\Rightarrow$": Sei $A := \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ abzählbar mit $\overline{A} = X$. Betrachte

$$\mathcal{A} := \big\{K_\varepsilon(a_i) \bigm| i \in \mathbb{N}, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+\big\}.$$

Ist $y \in X$ und U eine Umgebung von y, so gibt es ein $\delta \in \mathbb{Q}^+$ mit $y \in K_\delta(y) \subset U$. Da A dicht in X liegt, gibt es außerdem für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \in K_\varepsilon(y)$. Mit $\varepsilon = \delta/2$ gilt $y \in K_\varepsilon(a_n) \subset K_\delta(y) \subset U$, also ist $\mathcal{A}$ eine Basis von $\mathcal{T}(d)$.

„$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{B} = \{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von $\mathcal{T}(d)$. Wähle für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein x_n aus B_n aus. Dann ist $\overline{\{x_n | n \in \mathbb{N}\}} = X$, denn jede Umgebung eines beliebigen Punktes aus X enthält auch Punkte aus $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$: Ist nämlich $z \in X$ und V eine beliebige Umgebung von z, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $z \in B_n \subset V$ und damit ist auch $x_n \in V$ (vgl. Lemma 1.1.18 auf Seite 14). □

1.2.4 Satz *Separabilität ist eine topologische Invariante. Insbesondere sind Bilder polnischer Räume unter Homöomorphismen wieder polnische Räume.*

Beweis. Sei $(X, \mathcal{T}_1)$ ein separabler Raum und $f : X \longrightarrow Y$ ein Homöomorphismus in den topologischen Raum $(Y, \mathcal{T}_2)$. Da $(X, \mathcal{T}_1)$ separabel ist, wissen wir, dass eine abzählbare Menge $A \in X$ mit $\overline{A} = X$ existiert. Die Menge $f(A)$ ist ebenfalls abzählbar und $\overline{f(A)} = f(\overline{A}) = f(X) = Y$ (vgl. Satz 1.1.33 auf Seite 20).
Vollständige Metrisierbarkeit ist laut Satz 1.1.49 auf Seite 26 eine topologische Invariante. □

Das folgende Lemma erläutert, inwiefern lokal kompakte, polnische Räume als „klein" oder leicht zu handhaben angesehen werden können:

1.2.5 Lemma *In lokal kompakten, polnischen Räumen $(X, \mathcal{T})$ gilt:*

(1) Es gibt eine aufsteigende Mengenfolge $(R_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus offenen, relativ kompakten Mengen mit $R_j \nearrow X$.

(2) Es gibt eine bezüglich endlicher Vereinigungen und Schnitte abgeschlossene abzählbare Basis aus relativ kompakten Mengen für $\mathcal{T}$.

(3) Es gibt paarweise disjunkte, relativ kompakte Teilmengen $D_1, D_2 \ldots$ von X mit $\bigcup_{i=1}^n D_i$ offen für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{i=1}^\infty D_i = X$.

Beweis. *(1)*: X besitzt nach Satz 1.2.3 auf der vorherigen Seite eine abzählbare Basis $\mathcal{B} = \{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Da X außerdem lokal kompakt ist, gibt es für jedes $x \in X$ eine kompakte Umgebung K_x von x. Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, gibt es nach Satz 1.1.9 auf Seite 12 für jedes $x \in X$ ein $i(x) \in \mathbb{N}$ mit $x \subset B_{i(x)} \subset K_x$ und somit ist $B_{i(x)}$ offen und relativ kompakt. Sei nun $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge von $(i)_{i\in\mathbb{N}}$, die in aufsteigender Reihenfolge genau die Indizes $j \in \mathbb{N}$ enthält, für die B_j relativ kompakt ist. Dann gilt

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_{i_n} \supset \bigcup_{x\in X} B_{i(x)} = X,$$

also ist $R_j := \bigcup_{n=1}^j B_{i_n}$ offen und $R_j \nearrow X$.

(2): Es sei $R_j \nearrow X$ die Folge aus *(1)* und $\mathcal{C}$ eine abzählbare Basis von $\mathcal{T}$. Weiterhin sei

$$\mathcal{C}_j := \{C \cap R_j \mid C \in \mathcal{C}\}$$

und $\mathcal{C}_\infty := \bigcup_{j=1}^\infty \mathcal{C}_j$. Da die $\mathcal{C}_j$ abzählbar sind, ist auch $\mathcal{C}_\infty$ abzählbar. Es gilt für eine offene Menge $V \subset \mathcal{T}$:

$$V = \bigcup_{C\in\mathcal{C},\ C\subset V} C = \bigcup_{C\in\mathcal{C},\ C\subset V} \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{C \cap R_j}_{\in\mathcal{C}_\infty} = \bigcup_{C\in\mathcal{C}_\infty,\ C\subset V} C.$$

Also ist $\mathcal{C}_\infty$ wirklich eine Basis von $\mathcal{T}$.

Um die Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Vereinigungen und Schnitte zu erhalten, erweitere man $\mathcal{C}_\infty$ einfach zunächst um die endlichen Schnitte und danach um die endlichen Vereinigungen. Beide Erweiterungen lassen sich jeweils als Vereinigung abzählbar vieler Mengen mit abzählbar vielen Elementen auffassen und sind daher abzählbar.
Erweitert man eine topologische Basis um bezüglich ihrer selbst offene Mengen, also insbesondere solche Mengen, die aus endlichen Abschlüssen oder Vereinigungen ihrer Elemente entstehen, so bleibt die erzeugte Topologie natürlich erhalten.

(3): Setzte $D_n := R_n \backslash \left(\bigcup_{j<n} R_j\right)$ mit $R_1, R_2, \ldots$ wie in Teil *(1)* des Lemmas. Die D_i sind dann natürlich relativ kompakt, disjunkt und $\bigcup_{i=1}^k D_i = R_k \nearrow X$. Weiterhin ist $\bigcup_{i=1}^n D_i = R_n$, also offen. $\square$

1.3 Der topologische Raum $\left(\acute{\mathbb{R}}^h, \acute{\mathcal{T}}\right)$

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einem „engen Verwandten“ des $\mathbb{R}^h$. Das Ziel der Einführung dieses Raumes ist es, einen zu Maßen mit „unendlich viel Masse“ in „infinitesimalem Abstand zum Nullpunkt“ passenden messbaren Raum zu schaffen.
Die in Kapitel 2 studierten zufälligen Maße sind Radon-Maß-wertige Zufallsvariablen (Radon-Maße sind Maße, die auf relativ kompakten Mengen endlich sind). In Kapitel 3 werden wir zur Berechnung des Maximum-Prozesses aus Theorem 3.3.1 Zufällige Maße verwenden, die (relativ) kompakten Mengen wie etwa $[-1,1]^h$ unendliche Werte zuweisen würden, also fast sicher keine Radon-Maße wären.
Mit der Alexandroff- oder Einpunkt-Kompaktifizierung des $\mathbb{R}^h$ erhält man nun einen kompakten Raum, der $\mathbb{R}^h$ als topologischen Teilraum besitzt. Entfernt man aus diesem Raum etwa den Nullpunkt, so erhält man einen zu $\mathbb{R}^h$ homöomorphen Raum, dessen relativ kompakte Mengen gerade die Mengen mit positivem Abstand zum Nullpunkt („*bounded away from zero*“) sind. Wir werden sehen, dass man heuristisch mit einigem Recht sagen kann, dass in diesem neuen Raum 0 und „Unendlich“ bzw. p_∞ die Rollen getauscht haben.
Dieser kleine Trick wird die relative Kompaktheit der Probleme bereitenden Mengen aufheben und so die Anwendung der Sätze aus Kapitel 2 ermöglichen.

1.3.1 Bezeichnung Wir verwenden die folgenden Notationen:

(1) $(\mathbb{R}^h, \mathcal{T}(d_2))$ ist der von der euklid. Metrik erzeugte topologische Raum auf $\mathbb{R}^h$,

(2) $(\widehat{\mathbb{R}^h}, \widehat{\mathcal{T}})$ ist die Alexandroff Kompaktifizierung von $(\mathbb{R}^h, \mathcal{T}(d_2))$,

(3) $\acute{\mathbb{R}}^h := \widehat{\mathbb{R}^h} \backslash \{0\} = \mathbb{R}^h \backslash \{0\} \cup \{p_\infty\}$ und $\acute{\mathcal{T}} := \left\{ V \cap \acute{\mathbb{R}}^h \;\middle|\; V \in \widehat{\mathcal{T}} \right\}$,

(4) $\mathbb{R}_0^h := \mathbb{R}^h \backslash \{0\}$ und $\mathcal{T}_0 := \left\{ V \cap \mathbb{R}_0^h \;\middle|\; V \in \widehat{\mathcal{T}} \right\}$.

1.3.2 Satz $(\mathbb{R}^h, \mathcal{T}(d_2))$,$(\acute{\mathbb{R}}^h, \acute{\mathcal{T}})$ *und* $(\mathbb{R}_0^h, \mathcal{T}_0)$ *sind offene Teilräume von* $(\widehat{\mathbb{R}^h}, \widehat{\mathcal{T}})$ *und* $(\mathbb{R}_0^h, \mathcal{T}_0)$ *ist außerdem ein Teilraum sowohl von* $(\mathbb{R}^h, \mathcal{T}(d_2))$ *als auch von* $(\acute{\mathbb{R}}^h, \acute{\mathcal{T}})$ *(vgl. Definition 1.1.20 auf Seite 16). Insbesondere sind damit für* $V \subset \widehat{\mathbb{R}^h}$ *folgende Aussagen äquivalent:*

(1) V *ist offen in* $\widehat{\mathbb{R}^h}$ *bezüglich* $\widehat{\mathcal{T}}$,

(2) $V \backslash \{p_\infty\}$ *ist offen in* $\mathbb{R}^h$ *bezüglich* $\mathcal{T}(d_2)$,

(3) $V \backslash \{0\}$ *ist offen in* $\acute{\mathbb{R}}^h$ *bezüglich* $\acute{\mathcal{T}}$,

(4) $V \backslash \{0, p_\infty\}$ *ist offen in* $\mathbb{R}_0^h$ *bezüglich* $\mathcal{T}_0$.

Beweis. Die Aussagen folgen sofort aus Teil *(1)* von Lemma 1.1.21 auf Seite 16, da $\mathbb{R}^h, \acute{\mathbb{R}}^h, \mathbb{R}_0^h \in \widehat{\mathcal{T}}$ und $\mathbb{R}_0^h \in \mathcal{T}(d_2) \cap \acute{\mathcal{T}}$ sind (vgl. Satz 1.1.29 auf Seite 19). $\square$

1.3.3 Satz *Für die topologischen Räume* $(\mathbb{R}^h, \mathcal{T}(d_2))$ *und* $(\acute{\mathbb{R}}^h, \acute{\mathcal{T}})$ *ist*

$$\acute{\mathbb{R}}^h \approx \mathbb{R}^h.$$

Beweis. Es sei $N := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{h+1}$ und

$$S^h := \{x \in \mathbb{R}^{h+1} \mid d_2(x, 0) = 1\},$$

die h-dimensionale Einheitssphäre im $\mathbb{R}^{h+1}$ versehen mit der relativen Topologie $\mathcal{T}(d_2)_{|S^n}$ von $(\mathbb{R}^{h+1}, \mathcal{T}(d_2))$ auf S^h. Laut Beispiel 1.1.39 auf Seite 23 ist

$$(\mathbb{R}^h, \mathcal{T}(d_2)) \approx \big(S^h \backslash N, \mathcal{T}(d_2)_{|S^h \backslash N}\big).$$

Mit Hilfe von Satz 1.1.43 auf Seite 25 erhalten wir

$$\widehat{\mathbb{R}^h} \approx S^h.$$

Ist $f : \widehat{\mathbb{R}^h} \longrightarrow S^h$ ein Homöomorphismus, so ist gemäß Satz 1.1.38 auf Seite 22 auch $f' : \acute{\mathbb{R}}^h \longrightarrow f(\acute{\mathbb{R}}^h) = S^h \backslash \{f(0)\}$ ein Homöomorphismus und damit

$$\acute{\mathbb{R}}^h \approx S^h \backslash \{f(0)\} \overset{\textit{Bsp. 1.1.39}}{\approx} S^h \backslash N.$$

Also ist $\acute{\mathbb{R}}^h \approx \mathbb{R}^h$. □

1.3.4 Korollar $(\acute{\mathbb{R}}^h, \acute{\mathcal{T}})$ *ist ein lokal kompakter, polnischer Raum.*

Beweis. Die genannten Eigenschaften sind topologische Invarianten (vgl. Satz 1.1.40 auf Seite 23 und 1.2.4 auf Seite 32). □

1.3.5 Bezeichnung In $\acute{\mathbb{R}}$ benutzen wir mit $a \in \mathbb{R}$ folgenden intuitiven Notationen:

$$\begin{aligned} [-\infty, a) &:= (-\infty, a) \cup \{p_\infty\} \\ [-\infty, a] &:= (-\infty, a] \cup \{p_\infty\} \\ (a, \infty] &:= (a, \infty) \cup \{p_\infty\} \\ [a, \infty] &:= [a, \infty) \cup \{p_\infty\} \end{aligned}$$

Man beachte, dass p_∞ in dieser Notation sowohl ∞ als auch $-\infty$ entspricht. In $\acute{\mathbb{R}}^h$ bezeichnen wir mit der üblichen h-dimensionalen Intervall-Notation den Schnitt der entsprechenden Menge aus $\overline{\mathbb{R}}^h$ mit $\acute{\mathbb{R}}^h$. Wir betonen die Zugehörigkeit eines Intervalls zu $\mathcal{P}(\acute{\mathbb{R}}^h)$ gegebenenfalls durch eine 0 im Index. Wir schreiben also zum Beispiel $(-1, 1)_0^h$ für

$$\{(x_1, \dots, x_h) \in \acute{\mathbb{R}}^h \mid x_i \in (-1, 1)\ \forall i = 1, \dots, h\} \not\ni 0$$

und so weiter.

Aus der Konstruktion von $\acute{\mathbb{R}}^h$ ergibt sich, dass

$$\left\{([-k,k]^h)^c \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\}$$

eine Umgebungsbasis von p_∞ bezüglich $\acute{\mathcal{T}}$ ist. Eine Folge $\big((a_{1,n},\dots,a_{h,n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\acute{\mathbb{R}}^h$ konvergiert also genau dann gegen p_∞, wenn es für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, mit

$$\max_{i=1,\dots,h}(|a_{i,n}|) \in (k,\infty]$$

für alle $n \geq n_0$. Dies deckt sich mit der Vorstellung von p_∞ als einem „unendlich fernen" Punkt und legitimiert die obige Notation.

1.3.6 Lemma *Die Menge $((-\varepsilon,\varepsilon)_0^h)^c$ ist für beliebiges $\varepsilon > 0$ kompakt in $\acute{\mathbb{R}}^h$. Insbesondere ist damit eine Menge $R \subset \acute{\mathbb{R}}^h$ genau dann relativ kompakt, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit:*

$$(-\varepsilon,\varepsilon)_0^h \subset R^c.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $((-\varepsilon,\varepsilon)_0^h)^c$ kompakt ist: $(-\varepsilon,\varepsilon)^h$ ist offen in $\mathbb{R}^h$, also offen in $\widehat{\mathbb{R}^h}$. Demnach ist

$$(-\varepsilon,\varepsilon)^h \in \widehat{\mathcal{T}} \overset{Def.\ 1.1.28}{=} \acute{\mathcal{T}} \cup \left\{\widehat{\mathbb{R}^h}\backslash K \;\middle|\; K \textit{ ist kompakt in } \acute{\mathbb{R}}^h\right\}.$$

Da $0 \in (-\varepsilon,\varepsilon)^h$ ist, muss $(-\varepsilon,\varepsilon)^h \in \left\{\widehat{\mathbb{R}^h}\backslash K \;\middle|\; K \textit{ ist kompakt in } \acute{\mathbb{R}}^h\right\}$ und damit $((-\varepsilon,\varepsilon)_0^h)^c$ kompakt in $\acute{\mathbb{R}}^h$ sein.

„$\Leftarrow$": Diese Richtung folgt sofort aus der Kompaktheit von $((-\varepsilon,\varepsilon)_0^h)^c$ und Satz 1.1.26 auf Seite 18.

„$\Rightarrow$": Wir zeigen: $(-\varepsilon,\varepsilon)_0^h$ ist nicht relativ kompakt, denn relativ kompakte Mengen enthalten natürlich keine nicht relativ kompakten Teilmengen (vgl. Satz 1.1.26 auf Seite 18):

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(-2\varepsilon,2\varepsilon)_0^h\backslash[-n^{-1},n^{-1}]_0^h$$

ist eine offene Überdeckung von $[-\varepsilon,\varepsilon]_0^h = \overline{(-\varepsilon,\varepsilon)_0^h}$ ohne endliche Teilüberdeckung. $\square$

1.3.7 Beispiel Für $y_1,\dots,y_h \in \mathbb{R}^+$ ist das Komplement $R^c_{y_1,\dots,y_h}$ der Menge

$$R_{y_1,\dots,y_h} := \left\{(x_1,\dots,x_h) \in \mathbb{R}^h \;\middle|\; |x_i| \leq y_i\right\},$$

gemäß Lemma 1.3.6 relativ kompakt.

1.3.8 Bezeichnung Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{B}(X) := \sigma(\mathcal{T})$$

die „kleinste“ σ-Algebra auf X die $\mathcal{T}$ enthält (die von $\mathcal{T}$ *erzeugte* σ-Algebra).

1.3.9 Lemma *Für die topologischen Räume* $(\widehat{\mathbb{R}^h}, \widehat{\mathcal{T}})$, $(\mathbb{R}^h, \mathcal{T}(d_2))$, $(\acute{\mathbb{R}}^h, \acute{\mathcal{T}})$ *und* $(\mathbb{R}_0^h, \mathcal{T}_0)$ *seien*

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0 &:= \big\{B \cup \{0\} \,\big|\, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^h)\big\},\\
\mathcal{B}_\infty &:= \big\{B \cup \{p_\infty\} \,\big|\, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^h)\big\},\\
\mathcal{B}_{0,\infty} &:= \big\{B \cup \{0, p_\infty\} \,\big|\, B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^h)\big\}.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}(\mathbb{R}^h) &= \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^h) \cup \mathcal{B}_0,\\
\mathfrak{B}(\acute{\mathbb{R}}^h) &= \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^h) \cup \mathcal{B}_\infty,\\
\mathfrak{B}(\widehat{\mathbb{R}^h}) &= \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^h) \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_\infty \cup \mathcal{B}_{0,\infty}.
\end{aligned}$$

Beachte, dass diese Vereinigungen paarweise disjunkt sind.

Beweis. Wir zeigen nur exemplarisch $\mathfrak{B}(\widehat{\mathbb{R}^h}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^h) \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_\infty \cup \mathcal{B}_{0,\infty}$.

„$\supset$“: Nach Satz 1.3.2 auf Seite 34 ist $\mathcal{T}_0 \subset \widehat{\mathcal{T}}$. Demnach ist dann $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0) \subset \mathfrak{B}(\widehat{\mathbb{R}})$. Da eine σ-Algebra komplementstabil ist und da $\mathbb{R}_0^h$, $\mathbb{R}^h$ und $\acute{\mathbb{R}}^h$ offen in $\widehat{\mathbb{R}^h}$ sind, müssen auch $\{0\}$, $\{p_\infty\}$ und $\{0, p_\infty\} \in \mathfrak{B}(\widehat{\mathbb{R}^h})$ sein. Aus der Vereinigungsstabilität einer σ-Algebra folgt daher $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_\infty \cup \mathcal{B}_{0,\infty} \subset \mathfrak{B}(\widehat{\mathbb{R}^h})$.

„$\subset$“: Wir zeigen zunächst $\widehat{\mathcal{T}} \subset \mathcal{B} := \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^h) \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_\infty \cup \mathcal{B}_{0,\infty}$: Ist $V \in \widehat{\mathcal{T}}$, so ist nach Definition der relativen Topologie $W := V \cap \mathbb{R}_0^h \in \mathcal{T}_0$ und damit

$$\mathcal{B} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^h) \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_\infty \cup \mathcal{B}_{0,\infty} \supset \big\{W, W \cup \{0\}, W \cup \{p_\infty\}, W \cup \{0, p_\infty\}\big\} \ni V.$$

Da $\mathfrak{B}(\widehat{\mathbb{R}^h})$ die „kleinste“ σ-Algebra ist, die $\widehat{\mathcal{T}}$ enthält, reicht es nun aus, zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf $\widehat{\mathbb{R}^h}$ ist.

(1) Es sind $\emptyset, \mathbb{R}_0^h \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^h)$ und damit $\widehat{\mathbb{R}^h} \in \mathcal{B}_{0,\infty}$, also $\emptyset, \widehat{\mathbb{R}^h} \in \mathcal{B}$.

(2) Es seien $V_1, V_2, \ldots \in \mathcal{B}$. Dann sind $V_1 \cap \mathbb{R}_0^h, V_2 \cap \mathbb{R}_0^h, \ldots \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^h)$ und daher ist $W := \mathbb{R}_0^h \cap \bigcup_{i=1}^\infty V_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^h)$. Also ist $\bigcup_{i=1}^\infty V_i \in \big\{W, W \cup \{0\}, W \cup \{p_\infty\}, W \cup \{0, p_\infty\}\big\} \subset \mathcal{B}$.

(3) Die Komplementstabilität folgert man nach einer Fallunterscheidung ($B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^h), B \in \mathcal{B}_0, \ldots$ usw.) aus der Komplementstabilität von $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^h)$ bezüglich der Komplementbildung in $\mathbb{R}_0^h$. □

1.3.10 Korollar *Eine Menge $A \subset \acute{\mathbb{R}}^h$ ist genau dann messbar in $\big(\acute{\mathbb{R}}^h, \mathfrak{B}(\acute{\mathbb{R}}^h)\big)$, wenn $A \backslash \{p_\infty\}$ messbar in $\big(\mathbb{R}^h, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^h)\big)$ ist. Umgekehrt ist eine Menge $B \subset \mathbb{R}^h$ genau dann messbar in $\big(\mathbb{R}^h, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^h)\big)$, wenn $B \backslash \{0\}$ messbar in $\big(\acute{\mathbb{R}}^h, \mathfrak{B}(\acute{\mathbb{R}}^h)\big)$ ist.*

Beweis. Da $\{p_\infty\} \in \sigma(\acute{\mathcal{T}})$ ist, ist eine Menge $A \subset \acute{\mathbb{R}}^h$ genau dann messbar bezüglich $\mathfrak{B}(\acute{\mathbb{R}}^h)$, wenn $A \backslash \{p_\infty\}$ messbar bezüglich $\mathfrak{B}(\acute{\mathbb{R}}^h)$ ist. Die Behauptung folgt damit sofort aus Lemma 1.3.9 auf der vorherigen Seite. □

1.3.11 Bemerkung Das Mengensystem

$$\mathcal{C} := \big\{ (b, c] \;\big|\; -\infty \leq b \leq c \leq \infty \textit{ und } c < 0 \text{ oder } 0 < b \;\big\} \subset \mathfrak{B}(\acute{\mathbb{R}})$$

erzeugt die Borel'sche σ-Algebra $\mathfrak{B}(\acute{\mathbb{R}})$ auf $\acute{\mathbb{R}}$.

Beweis. Ist $(p, q] \in \mathcal{C}$ und $p < q$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $p < q - n^{-1}$ für alle $n \geq n_0$. Deshalb ist $(p, q) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} (p, q - n^{-1}] \in \sigma(\mathcal{C})$, woraus folgt, dass

$$\mathcal{C}' := \big\{ (p, q) \;\big|\; p, q \in \mathbb{Q},\; p < q \textit{ und } q < 0 \text{ oder } 0 < p \;\big\} \subset \sigma(\mathcal{C})$$

ist. $\mathcal{C}'$ ist eine abzählbare Basis der Topologie $\mathcal{T}_0$ auf $\mathbb{R}_0$. Da $\mathbb{R}_0$ ein offener Teilraum von $\acute{\mathbb{R}}$ ist, ist eine bezüglich $\acute{\mathcal{T}}$ offene Menge $V \subset \mathbb{R}_0$ die abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\sigma(\mathcal{C})$ (vgl. Satz 1.3.2 auf Seite 34). Demnach muss auch $V \in \sigma(\mathcal{C})$ sein. Ist $V' \subset \acute{\mathbb{R}}$ offen, so ist $V = V' \cap \mathbb{R}_0$ ebenfalls offen und da $V, \{p_\infty\} \in \sigma(\mathcal{C})$ sind, muss auch $V' \in \{V, V \cup \{p_\infty\}\} \subset \sigma(\mathcal{C})$ sein. Wir haben also gezeigt: $\sigma(\mathcal{C}) \supset \sigma(\mathcal{C}') \supset \sigma(\acute{\mathcal{T}}) = \mathfrak{B}(\acute{\mathbb{R}})$.

Da Mengen aus $\mathcal{C}$ offensichtlich $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0)$-messbar sind, folgt $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathfrak{B}(\widehat{R^h})$ aus Lemma 1.3.9 auf der vorherigen Seite. □

2 Zufällige Maße

In diesem Kapitel wollen wir uns mit dem wahrscheinlichkeitstheoretischen Handwerkszeug vertraut machen, das wir benötigen, um mit Zufälligen Maßen und insbesondere Punktprozessen umgehen zu können. Vor allem Konvergenzaussagen (vage Konvergenz, Konvergenz in Verteilung) derartiger Zufallsvariablen werden wir in Kapitel 3 zur Berechnung der Grenzverteilung des Maximum-Prozesses aus dem Satz von Mikosch und Račkauskas (Theorem 3.3.1 auf Seite 113) benötigen.
Hierzu werden wir uns zunächst mit der topologischen Struktur auf dem Raum der Radon-Maße $M_+(E)$ beschäftigen und anschließend Zufällige Maße (borel-messbare Zufallsvariablen mit Werten in $M_+(E)$) einführen. Dieses Kapitel soll uns vor allem folgende Aussagen erschließen:

(1) Der Raum der Radon-Maße kann in Übereinstimmung mit dem Begriff der vagen Konvergenz von Maßen vollständig metrisiert werden (Abschnitt 2.2).

(2) Vage Konvergenz von Radon-Maßen $\mu_1, \mu_2, \dots$ auf einem lokal kompakten, polnischen Raum E ist für bestimmte Mengensysteme $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(E)$ äquivalent zur Konvergenz der reellen Zufallsvariablen $\mu_1[J], \mu_2[J_2], \dots$ (den Auswertungsabbildungen der Maße) $J \in \mathcal{J}$ (Theorem 2.4.1 auf Seite 66).

(3) Zufälligen Maßen lassen sich Abbildungen zuordnen, so dass punktweise Konvergenz einer Folge solcher Abbildungen äquivalent zur Konvergenz in Verteilung der zugehörigen Zufälligen Maße ist (Abschnitt 2.6).

(4) Es gibt bestimmte Mengensysteme $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(E)$, so dass die Konvergenz in Verteilung Zufälliger Maße $\xi_1, \xi_2, \dots$ auf E äquivalent zur Konvergenz endlicher Vektoren

$$(\xi_n[J_1], \dots \xi_n[J_k]) \xrightarrow{d} (\xi[J_1], \dots \xi[J_k]), \quad k \in \mathbb{N},\ J_i \in \mathcal{J}$$

ist (Theorem 2.7.4 auf Seite 82).

2.1 Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

Wir sammeln in diesem Abschnitt einige Grundbegriffe aus der Wahrscheinlichkeitstheorie, um dem Leser ein schnelles Nachschlagen der relevanten Definitionen und Sätze im exakten Wortlaut zu ermöglichen. Da die Inhalte dieses Kapitel großteils in den Grundveranstaltungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie und den meisten Lehrbüchern behandelt werden, verzichten wir weitestgehend auf Beweise und geben statt dessen gegebenenfalls Literaturverweise an.

Maßtheorie

Wir wollen an dieser Stelle alle relevanten maßtheoretischen Begriffe, die über die der σ-Algebra, des Erzeugendensystems, des Maßes, der Messbar- und Integrierbarkeit hinaus gehen, kurz rekapitulieren:

2.1.1 Definition (Dynkin-System) Ein **Dynkin-System** (auch **λ-System**) auf einer Menge Ω ist ein Mengensystem $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ mit

(D1) $\Omega \in \mathcal{D}$,

(D2) $A, B \in \mathcal{D}$ und $A \subset B \Rightarrow B \backslash A \in \mathcal{D}$,

(D3) Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkt so ist $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$.

Analog zu den σ-Algebren bezeichnen wir das kleinste Dynkin-System, das ein Mengensystem $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ enthält mit $\delta(\mathcal{G})$. Das heißt: Für

$$\mathfrak{D}_\Omega := \left\{ D \subset \mathcal{P}(\Omega) \;\middle|\; D \textit{ ist ein Dynkin-System auf } \Omega \right\}$$

ist $\delta(\mathcal{G}) \in \mathfrak{D}_\Omega$ definiert als

$$\delta(\mathcal{G}) := \bigcap_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_\Omega,\ \mathcal{G} \subset \mathcal{D}} \mathcal{D}.$$

2.1.2 Satz ***(Satz von Dynkin)*** *Ist $\mathcal{G}$ ein schnittstabiles Mengensystem (d.h. $A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{G}$), so gilt*

$$\delta(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G}).$$

(Siehe [Klenke, 2008] S.7.)

2.1.3 Satz ***(Eindeutigkeitssatz für Maße)*** *Es seien P und Q Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$. Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ schnittstabil und ist $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$, so gilt*

$$P[A] = Q[A] \quad \textit{für alle } A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; P = Q.$$

(Siehe [Klenke, 2008] S.19.)

2.1.4 Definition (Semiring) Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ heißt **Semiring**, falls gilt:

(S1) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(S2) für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ ist $B \backslash A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ für geeignete paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$,

(S3) $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{A}$.

2.1.5 Definition (additive, σ-subadditive und σ-endliche Mengenfunktionen) Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_0^+$ heißt

(1) **additiv**, falls für disjunkte $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\Big[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} \mu[A_i],$$

(2) **σ-additiv**, falls auch für abzählbar unendlich viele disjunkte $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\Big[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big] = \sum_{i=1}^{\infty} \mu[A_i],$$

(3) **σ-subadditiv**, falls für abzählbar unendlich viele $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu\Big[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu[A_i],$$

(4) **σ-endlich**, falls μ additiv ist und es außerdem Mengen $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$ gibt mit $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ und $\mu[B_i] < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Des Weiteren nennen wir einen Maßraum σ-endlich, falls das zugehörige Maß σ-endlich ist.

2.1.6 Satz ***(Fortsetzungssatz für Maße)*** *Sei $\mathcal{A}$ ein Semiring und $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ eine additive, σ-subadditive und σ-endliche Mengenfunktion mit $\mu[\emptyset] = 0$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes, σ-endliches Maß $\widetilde{\mu} : \sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow [0, \infty]$ mit $\widetilde{\mu}[A] = \mu[A]$ für alle $A \in \mathcal{A}$.*

(Siehe [Klenke, 2008] S.24.)

2.1.7 Satz ***(Transformationssatz)*** *Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Psi, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum und die Abbildung $\varphi : \Omega \longrightarrow \Psi$ messbar. Es bezeichne $\mu \circ \varphi^{-1}$ das Bildmaß von φ auf Ψ (d.h. das Maß mit $\mu \circ \varphi^{-1}[A] = \mu[\varphi^{-1}(A)]$ für alle $A \in \mathcal{E}$). Ist $f : \Psi \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ messbar, so gilt*

$$\int_\Psi f \; d(\mu \circ \varphi^{-1}) = \int_\Omega f \circ \varphi \; d\mu.$$

(Siehe [Billingsley, 1995] S.216.)

2.1.8 Definition und Satz (Borel'sche σ-Algebra) Für einen topologischen Raum $(E, \mathcal{T})$ heißt die, von der Topologie (d.h. von den offenen Mengen) erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{B}(E)$ auf E, die Borel'sche σ-Algebra. Ist im Folgenden von einem messbaren Raum $(E, \mathfrak{B}(E))$ die Rede, so soll dies implizieren, dass diesem ein topologischer Raum $(E, \mathcal{T})$ zugrunde liegt. Auf diese Weise können wir auf die ausführliche Schreibweise topologischer Räume als Tupel aus einer Menge und einer Topologie verzichten und diese Notation für messbare Räume reservieren. $\mathfrak{B}(E)$ lässt sich auf folgende Arten charakterisieren:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(E) &:= \sigma\big(\big\{V \in \mathbb{E} \;\big|\; V \textit{ ist offen bzgl. } \mathcal{T}\big\}\big) \\ &= \sigma\big(\big\{V \in \mathbb{E} \;\big|\; V \textit{ ist abgeschlossen bzgl. } \mathcal{T}\big\}\big) \\ &= \sigma\big(\big\{V \in \mathbb{E} \;\big|\; V \textit{ ist kompakt bzgl. } \mathcal{T}\big\}\big) \end{aligned}$$

(siehe [Klenke, 2008] S. 9 f.). Beachte, dass stetige Abbildungen zwischen zwei mit den jeweiligen Borel'schen σ-Algebren versehenen Räumen messbar sind, da die Urbilder eines Erzeugendensystems (nämlich der offenen Mengen) messbar sind.

2.1.9 Bezeichnung Sei E ein topologischer Raum. Wir bezeichnen für den messbaren Raum $(E, \mathfrak{B}(E))$ mit

$$\begin{array}{lcl} M_1(E) & := & \big\{\mu \textit{ Maß auf } \big(E, \mathfrak{B}(E)\big) \;\big|\; \mu[E] = 1\big\} \\ M_{\leq 1}(E) & := & \big\{\mu \textit{ Maß auf } \big(E, \mathfrak{B}(E)\big) \;\big|\; \mu[E] \leq 1\big\} \\ M_f(E) & := & \big\{\mu \textit{ Maß auf } \big(E, \mathfrak{B}(E)\big) \;\big|\; \mu[E] \leq \infty\big\} \end{array}$$

die Menge der **Wahrscheinlichkeits-**, **Sub-Wahrscheinlichkeits-** beziehungsweise **endlichen Maße** auf $(E, \mathfrak{B}(E))$. Des Weiteren bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{L}(E) := \big\{X : \Omega \longrightarrow E \;\big|\; \exists \textit{ W-Raum } (\Omega, \mathcal{A}, P) \textit{ mit } X^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}\big\}$$

den Raum aller Zufallsvariablen auf $(E, \mathfrak{B}(E))$.

2.1.10 Definition (Radon-Maß) Sei E ein polnischer Hausdorff-Raum. Ein Maß μ auf $(E, \mathfrak{B}(E))$ heißt **Radon-Maß** auf E, falls $\mu[K] < \infty$ ist für alle kompakten $K \subset E$. Wir bezeichnen den Raum aller Radon-Maße auf E mit

$$M_+(E) := \left\{\mu \text{ Maß auf } \big(E, \mathfrak{B}(E)\big) \;\middle|\; \mu[K] \leq \infty \; \forall K \in E \text{ kompakt}\right\}.$$

Beachte, dass ein Radon-Maß auf einem lokal kompakten, polnischen Raum immer σ-endlich ist (vgl. Lemma 1.2.5 auf Seite 32).

Konvergenzbegriffe

In dieser Arbeit werden wir auf insgesamt 6 wahrscheinlichkeitstheoretische Konvergenzbegriffe zurückgreifen: Für Maße benötigen wir: Fast-Überall-Konvergenz, Konvergenz im Mittel, dem Maße nach, schwache und vage Konvergenz. Für Zufallsvariablen die Konvergenz in Verteilung. Nach einigen einleitenden Definitionen und Bezeichnungen werden wir diese Begriffe kurz definieren und uns einige ihrer wichtigen Eigenschaften ins Gedächtnis rufen.

2.1.11 Definition (Träger) Sei E ein Hausdorff-Raum und $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann nennen wir

$$S_f := \overline{f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})}$$

der **Träger** *(support)* von f.

2.1.12 Lemma *Für einen Hausdorff-Raum E hat eine Abbildung $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann einen kompakten Träger, wenn es eine kompakte Menge $K \subset E$ gibt mit $f(K^c) \subset \{0\}$.*

Beweis. „$\Leftarrow$“: $f(K^c) \subset \{0\} \;\Rightarrow\; f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \cap K^c = \emptyset \;\Rightarrow\; f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) \subset K$
$\Rightarrow\; S_f = \overline{f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})} \subset \overline{K} = K$
Da abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen kompakt sind, folgt die Behauptung.

„$\Rightarrow$“: Für $K := S_f$ gilt $f(S_f^c) = f\Big(\big(\overline{f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})}\big)^c\Big) \subset f\big(f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})^c\big) = f\big(f^{-1}(\{0\})\big) \subset \{0\}$.
Nach Voraussetzung ist $K = S_f$ demnach kompakt. □

2.1.13 Bezeichnung Für einen polnischen Raum E verwenden wir für die Klasse der reellwertigen beziehungsweise nichtnegativen, stetigen und beschränkten Funktionen auf E die Notationen

$$C_b(E) := \left\{f : E \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ stetig und beschränkt}\right\} \text{ bzw.}$$
$$C_b^+(E) := \left\{f : E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \;\middle|\; f \text{ stetig und beschränkt}\right\}.$$

Analog bezeichnen wir die Klasse der reellwertigen beziehungsweise nichtnegativen, stetigen Funktionen auf E mit kompaktem Träger mit

$$\begin{aligned} C_K(E) &:= \Big\{ f : E \longrightarrow \mathbb{R} \;\Big|\; f \textit{ stetig mit kompaktem Träger} \Big\} \textit{ bzw.} \\ C_K^+(E) &:= \Big\{ f : E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \;\Big|\; f \textit{ stetig mit kompaktem Träger} \Big\}. \end{aligned}$$

Es gilt $C_K(E) \subset C_b(E)$ und $C_K^+(E) \subset C_b^+(E)$, da das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung $f \in C_K^+(E)$ kompakt ist und für den kompakten Träger S_f von f gilt: $f(E) = f(S_f) \cup f(S_f^c) = f(S_f) \cup \{0\}$.

2.1.14 Definition (Konvergenz im Mittel) Es seien $f, f_1, f_2, \ldots$ integrierbare Abbildungen auf einem σ-endlichen Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Wir sagen, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert im Mittel** gegen f (Notation: $f_n \xrightarrow{L^1} f$), falls

$$\mathbb{E}\big(|f - f_n|\big) = \int_\Omega |f - f_n| \, d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2.1.15 Definition (Fast-Überall-/Fast-Sichere-Konvergenz) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f, f_1, f_2, \ldots : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \longrightarrow (E, \mathfrak{B}(E))$ messbare Abbildungen in einen polnischen Raum E mit Metrik d. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert **fast überall** gegen f (Notation: $f_n \xrightarrow{f.\ddot{u}.} f$), falls es eine Menge $N \in \mathfrak{B}(E)$ gibt mit $\mu[N] = 0$ und

$$d(f(\omega), f_n(\omega)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \;\; \textit{für alle } \omega \in \Omega \backslash N.$$

Ist μ sein Wahrscheinlichkeitsmaß, so spricht man auch von **fast sicherer** (f.s.) Konvergenz.

2.1.16 Definition (Konvergenz dem Maße nach) Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $f, f_1, f_2, \ldots : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \longrightarrow (E, \mathfrak{B}(E))$ messbare Abbildungen in einen polnischen Raum E mit Metrik d. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert dem Maße nach** (oder stochastisch) gegen f (Notation: $f \xrightarrow{\mu} f$), falls für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass

$$\mu\Big[\big\{\omega \in \Omega \mid d\big(f(\omega), f_n(\omega)\big) > \varepsilon\big\}\Big] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2.1.17 Definition (schwache und vage Konvergenz, Konvergenz in Verteilung) Es sei E ein metrisierbarer Raum, versehen mit der Borel'schen σ-Algebra. Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $M_f(E)$. Wir sagen, dass $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **schwach gegen** $\mu \in M_f(E)$ **konvergiert**, falls

$$\int_E f\ d\mu_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_E f\ d\mu \quad \textit{für alle } f \in C_b(E).$$

Wir schreiben dann $\mu_n \stackrel{w}{\longrightarrow} \mu$ oder $\mu = w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n$. Eine Folge $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M_+(E)$, heißt $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **vag konvergent gegen** $\nu \in M_+(E)$, falls

$$\int_E f\ d\nu_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_E f\ d\nu \quad \textit{für alle } f \in C_K(E).$$

In diesem Fall verwenden wir die Notationen $\nu_n \stackrel{d}{\longrightarrow} \nu$ oder $\nu = v\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \nu_n$. Wir nennen eine Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{L}(E)$ **konvergent in Verteilung** (oder auch schwach) gegen $X \in \mathfrak{L}(E)$, falls die Verteilungen $P_n \circ X_n^{-1}$ der X_n schwach gegen die Verteilung $P \circ X^{-1}$ von X konvergieren. Wir schreiben dann $X_n \stackrel{d}{\longrightarrow} X$ oder $X = d\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} X_n$.

2.1.18 Bezeichnung Sind X und X' Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen messbaren Raum $(E, \mathcal{E})$ und haben X und X' die gleiche Verteilung, so schreiben wir

$$X \stackrel{d}{=} X'.$$

2.1.19 Satz ***(wichtige Implikationen zwischen den Konvergenzarten)*** *Konvergenz im Mittel sowie Fast-Sichere-Konvergenz implizieren (unabhängig von einander) Konvergenz dem Maße nach und Konvergenz dem Maße nach impliziert Konvergenz in Verteilung.*

(Siehe [Bauer, 1991] S.40.)

2.1.20 Lemma *Für eine Folge reeller Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:*

$$X_n \stackrel{d}{\longrightarrow} 0 \iff X_n \stackrel{P}{\longrightarrow} 0.$$

Beweis. Die Implikation „$\Leftarrow$“ ist bereits in Satz 2.1.19 enthalten. Andererseits gilt für alle $\varepsilon > 0$ aufgrund der Konvergenz in Verteilung der X_i

$$P(|X_n| > \varepsilon) = \int_\Omega \mathbb{I}_{(\varepsilon,\infty)}(|X_n|)\ dP = \int_\mathbb{R} \mathbb{I}_{(\varepsilon,\infty)}(|x|)\ dP \circ X_n^{-1}(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad \square$$

2.1.21 Satz *Eine Folge reeller Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ konvergiert genau dann in Verteilung gegen eine reelle Zufallsvariable X, wenn für die Verteilungsfunktionen $F_X, F_{X_1}, F_{X_2}, \ldots$ von $X, X_1, X_2, \ldots$ gilt, dass*

$$F_{X_n}(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X(x) \text{ für alle Stetigkeitspunkte } x \text{ von } F_X$$

(Siehe [Klenke, 2008] S.256.)

2.1.22 Satz *Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zufallsvariablen und $X_n \xrightarrow{d} X$. Dann gilt:*

$$X_n - Y_n \xrightarrow{d} 0 \;\Rightarrow\; Y_n \xrightarrow{d} X$$

(Siehe [Billingsley, 1995] S.332.)

2.1.23 Korollar *Sind $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\Delta_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\Delta_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zufallsvariablen und $X_n \xrightarrow{d} X$, so gilt:*

(1) $X_n = Y_n + \Delta_n$ *und* $\Delta_n \xrightarrow{d} 0 \;\Rightarrow Y_n \xrightarrow{d} X$

(2) $Y_n - \Delta_n^- \le X_n \le Y_n + \Delta_n^+, \quad \Delta_n^-,\ \Delta_n^+ \ge 0,$ *und* $\Delta_n^-,\ \Delta_n^+ \xrightarrow{d} 0 \Rightarrow Y_n \xrightarrow{d} X$

Beweis. *(1)*: $X_n - Y_n = \Delta_n \xrightarrow{d} 0$, die Behauptung folgt also sofort aus Satz 2.1.22.

(2): $Y_n - \Delta_n^- \le X_n \le Y_n + \Delta_n^+ \Rightarrow |X_n - Y_n| \le \Delta_n^- + \Delta_n^+ \xrightarrow{d} 0$. Also gilt nach Satz 2.1.22 $Y_n \xrightarrow{d} X$. □

2.1.24 Satz ***(Cramér-Wold Device)*** *Sei $h \in \mathbb{N}$ und $X_n := (X_n^{(1)}, \ldots, X_n^{(h)}) \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^h)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) Es existiert ein $X := (X^{(1)}, \ldots, X^{(h)}) \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^h)$, so dass

$$X_n \xrightarrow{d} X.$$

(2) Für alle $t = (t_1, \ldots, t_h) \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^h)$ gibt es eine Zufallsvariable $Y(t) \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^h)$, so dass gilt

$$\sum_{i=1}^{h} t_i X_n^{(i)} \xrightarrow{d} Y(t).$$

Gilt (1) oder (2), so ist $Y(t) = \sum_{i=1}^{h} t_i X^{(i)}$.

(Siehe [Klenke, 2008] S.327.)

2.1.25 Satz *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und*

$$f^{(i)}, f_n^{(i)} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (E, \mathfrak{B}(E)), \quad n \in \mathbb{N},\ i = 1, \dots, m$$

messbare Abbildungen in einen polnischen Raum E mit Metrik d. Dann gilt für den Produktraum $(\Omega^h, \mathcal{A}^{\otimes h}, P^{\otimes h})$, $h \in \mathbb{N}$,

$$(f_n^{(1)}, \dots, f_n^{(h)}) \xrightarrow{P^{\otimes h}} (f^{(1)}, \dots, f^{(h)}) \iff f_n^{(i)} \xrightarrow{P} f^{(i)} \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

(Siehe [Bauer, 1990] S.153.)

2.1.26 Satz ***(Satz von der stetigen Abbildung)*** *Seien E_1 und E_2 metrisierbare Räume, versehen mit den zugehörigen Borel'schen σ-Algebren. Weiterhin sei $\varphi : E_1 \longrightarrow E_2$ eine messbare Abbildung und U_φ die Menge der Unstetigkeitsstellen von φ.*

(1) Sind $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \in M_{\le 1}(E_1)$ mit $\mu[U_\varphi] = 0$ und $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ dann gilt:

$$\mu_n \circ \varphi^{-1} \xrightarrow{d} \mu \circ \varphi^{-1}.$$

(2) Sind $X, X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen auf E_1 mit $P(X \in U_\varphi) = 0$ und $X_n \xrightarrow{d} X$, so folgt:

$$\varphi(X_n) \xrightarrow{d} \varphi(X).$$

(Siehe [Klenke, 2008] S.257.)

Konvergenz von messbaren Abbildungen und Integralen

2.1.27 Satz *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller $\mathcal{F}$-$\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}_0^+})$-messbarer Abbildungen. Dann sind auch*

$$\begin{aligned}
\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \omega \longmapsto \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(\omega),\\
\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \omega \longmapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\omega),\\
\liminf_{n \to \infty} f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \omega \longmapsto \liminf_{n \to \infty} f_n(\omega),\\
\limsup_{n \to \infty} f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \omega \longmapsto \limsup_{n \to \infty} f_n(\omega)
\end{aligned}$$

und gegebenenfalls

$$\lim_{n \to \infty} f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \omega \longmapsto \lim_{n \to \infty} f_n(\omega)$$

messbar.

Beweis. Wir zeigen zunächst: $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ist messbar: Sei $x \in \overline{\mathbb{R}_0^+}$. Es ist $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\omega) \le x$ genau dann, wenn $f_n(\omega) \le x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist:

$$\left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\omega) \le x\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; f_n(\omega) \le x\right\}}_{\mathcal{F}\text{-}\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}_0^+})\text{-messbar}}.$$

$\mathcal{F}$-$\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}_0^+})$-messbar. Analog zeigt man, dass $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ $\mathcal{F}$-$\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}_0^+})$-messbar ist und damit sind auch

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{i=1,\ldots,n} f_i \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{i=1,\ldots,n} f_i$$

messbar. Ist f_n punktweise konvergent gegen f, so ist $f = \liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n$, also messbar. □

2.1.28 Definition (einfache Funktion) Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum. Eine **einfache Funktion** ist eine Abbildung der Form

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{I}_{F_i}$$

mit $c_1, \ldots, c_n \in \overline{\mathbb{R}}$ und $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$.

2.1.29 Lemma *Ist $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum und $f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{R}_0^+}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}_0^+}))$ eine messbare Abbildung, so gibt es eine Folge von einfachen Funktionen f_n mit $f_n \nearrow f$.*

Beweis. Betrachte die Abbildung $f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_0^+}$ mit

$$f_n(\omega) := \begin{cases} \frac{k-1}{2^n} & \text{falls es ein } k = 1, \ldots, n \text{ mit } \frac{k-1}{2^n} \leq f(\omega) < \frac{k}{2^n} \text{ gibt} \\ n & \text{falls } f(\omega) \geq n. \end{cases}$$

Es gilt $f_n \nearrow f$. Des Weiteren ist f_n eine einfache Funktion, denn f_n hat eine Darstellung

$$f_n = n\mathbb{I}_{f^{-1}([n,\infty])} + \sum_{i=1}^{n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{I}_{f^{-1}([\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}))}.$$

□

2.1.30 Satz ***(Satz von der monotonen Konvergenz*** *Seien $f_1, f_2, \dots$ nichtnegative, messbare Funktionen auf einem gemeinsamen Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ und sei $f_n \nearrow f$ fast überall für eine weitere Abbildung f auf Ω. Dann ist f messbar und es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \; d\mu = \int_\Omega f \; d\mu.$$

Beachte, dass die Aussage wahr bleibt, wenn man ∞ als Wert der Integrale zulässt.

(Siehe [Klenke, 2008] S.95.)

2.1.31 Satz ***(Satz von der dominierten Konvergenz)*** *Seien $f, f_1, f_2, \dots$ Funktionen auf einem gemeinsamen Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, sei f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ messbar und*

$$f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

Gibt es eine integrierbare Abbildung g auf Ω, mit $|f_n| \leq g$ fast überall für jedes (bis auf endlich viele) $n \in \mathbb{N}$, so ist f integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \; d\mu = \int_\Omega f \; d\mu.$$

(Siehe [Klenke, 2008] S.142.)

2.2 Vage Topologie

In diesem Abschnitt werden wir den Raum der Radon-Maße $M_+(E)$ mit einer topologischen Struktur versehen. Die topologischen Eigenschaften dieses Raums und seiner Teilmengen sind allerdings oft nicht so leicht nachzuweisen. Aus diesem Grund werden wir einige Hilfssätze vorstellen, die uns helfen

(1) kompakte Mengen „von oben“ durch kompakte Mengen und offene Mengen „von unten“ durch offene, relativ kompakte Mengen zu approximieren (Lemma 2.2.7 auf Seite 52),

(2) stetige Funktionen mit kompaktem Träger zu finden, die in einem gewissen Sinne charakteristische Funktionen (Indikatorfunktionen) von kompakten Mengen „von oben“ (bzw. charakteristische Funktionen von offenen Mengen „von unten“) gut approximieren (ebenda),

(3) die relative Kompaktheit von Mengen in $M_+(E)$ nachzuweisen (Lemma 2.2.9 auf Seite 54)

(4) und schließlich $M_+(E)$ als polnischen Raum zu identifizieren (Theorem 2.2.12 auf Seite 58).

2.2.1 Bezeichnung Sei E ein polnischer Raum versehen mit der Borel'schen σ-Algebra $\mathfrak{B}(E)$. Für eine integrierbare Abbildung $f : E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ und ein Maß μ auf $(E, \mathfrak{B}(E))$ bezeichnen wir mit

$$\langle f, \mu \rangle := \int_E f(x)\, d\mu(x)$$

das Integral von f über E bezüglich μ und mit f^* die Abbildung

$$f^* : M_+(E) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ \mu \longmapsto \langle f, \mu \rangle.$$

2.2.2 Definition (Vage Topologie) Es sei E polnisch. Die **vage Topologie** $\mathcal{T}_v(M_+(E))$ auf $M_+(E)$ ist die von der Subbasis

$$\Big\{ \{\mu \in M_+(E) \mid \langle f, \mu \rangle \in (x,y)\} \,\Big|\, x < y \in \mathbb{R}_0^+,\ f \in C_K^+(E) \Big\}$$

erzeugte Topologie (vgl. Satz 1.1.4 auf Seite 11).

2.2.3 Bemerkung Eine Abbildung ist genau dann stetig, wenn die Urbilder offener Mengen offen sind (Satz 1.1.33 auf Seite 20). Die oben angegebene Subbasis von $\mathcal{T}_v(M_+(E))$ enthält genau die Urbilder der Mengen (x,y) mit $x < y \in \mathbb{R}$ unter den Abbildungen f^* mit $f \in C_K^+(E)$. Da $\{(x,y) \mid x < y \in \mathbb{R}\}$ eine Subbasis der von der euklidischen Metrik d_2 erzeugten Topologie $\mathcal{T}(d_2)$ auf $\mathbb{R}$ ist kann man daher leicht zeigen, dass $\mathcal{T}_v(M_+(E))$ die gröbste Topologie ist, bezüglich derer die f^* mit $f \in C_K^+(E)$ stetig sind.

Um diese Topologie handhaben zu können suchen wir uns zunächst eine Umgebungsbasis für einen festen Punkt μ aus $M_+(E)$. Wie in Kapitel 1 erwähnt, sind Umgebungsbasen nützliche Hilfsmittel zum Nachweis topologischer Eigenschaften eines Raumes.

2.2.4 Lemma *Ist E ein polnischer Raum, so ist für einen Punkt $\mu \in M_+(E)$ das Mengensystem*

$$\mathcal{U}(\mu) := \Big\{ \bigcap_{i=1}^{k} \{\nu \in M_+(E) \mid |\langle f_i, \nu\rangle - \langle f_i, \mu\rangle| < \varepsilon\} \,\Big|\, \varepsilon > 0,\ k \in \mathbb{N},\ f_1, \dots, f_k \in C_K^+(E) \Big\}$$

eine Umgebungsbasis von μ bezüglich $\mathcal{T}_v(M_+(E))$.

Beweis. Offenbar ist

$$\Big\{ \{\mu \in M_+(E) \mid \langle f_i, \mu\rangle \in (x_i, y_i)\ \forall i = 1, \dots, k\} \,\Big|\, x_i < y_i \in \mathbb{R}_0^+,\ k \in \mathbb{N},\ f \in C_K^+(E) \Big\}$$

eine Basis von $\mathcal{T}_v(M_+(E))$. Ist also $V \in \mathcal{T}_v(M_+(E))$ mit $\mu \in V$, so existieren geeignete $x_i < y_i \in \mathbb{R}_0^+,\ k \in \mathbb{N}$ und $f \in C_K^+(E)$, so dass

$$\mu \in \{\nu \in M_+(E) \mid \langle f_i, \nu\rangle \in (x_i, y_i)\ \forall i = 1, \dots, k\} \subset V.$$

Wähle nun ein positives

$$\varepsilon' < min\{y_i - \langle f_i, \mu\rangle, \langle f_i, \mu\rangle - x_i \mid i = 1, \dots, k\} > 0.$$

Dann ist

$$\mu \in U := \{\nu \in M_+(E) \mid |\langle f_i, \nu\rangle - \langle f_i, \mu\rangle| < \varepsilon'\ \forall i = 1, \dots, k\} \in \mathcal{U}(\mu)$$

und

$$U \subset \{\nu \in M_+(E) \mid \langle f_i, \nu\rangle \in (x_i, y_i)\ \forall i = 1, \dots, k\} \subset V.$$

Es bleibt nur noch die Existenz einer offenen Menge V' mit $\mu \in V' \subset U$ zu zeigen. U lässt sich alternativ als

$$U = \{\nu \in M_+(E) \mid \langle f_i, \nu\rangle \in (\langle f_i, \mu\rangle - \varepsilon', \langle f_i, \mu\rangle + \varepsilon')\ \forall i = 1, \dots, k\}$$

schreiben, also ist U ein Element der topologischen Basis und somit offen. □

Nun können wir den Namen der vagen Topologie rechtfertigen. Die vage Topologie ist nämlich genau die zur vagen Konvergenz passende Topologie. Der Beweis dieser Aussage wird uns später ermöglichen, wahrscheinlichkeitstheoretische Aussagen sinnvoll mit topologischen zu verknüpfen.

2.2.5 Satz *Für einen polnischen Raum E stimmt die topologische Konvergenz auf $M_+(E)$ bezüglich der vagen Topologie $\mathcal{T}_v(M_+(E))$ mit der vagen Konvergenz in $M_+(E)$ überein.*

Beweis. Es sei $\mathcal{U}(\mu)$ die Umgebungsbasis von μ aus Lemma 2.2.4. Es gilt: $\mu_n \xrightarrow{top.} \mu$, genau dann, wenn für alle

$$U = \left\{ \nu \in M_+(E) \;\middle|\; |\langle f_i, \nu\rangle - \langle f_i, \mu\rangle| < \varepsilon \;\forall i = 1, \dots, k \right\} \in \mathcal{U}(\mu)$$

ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $\mu_n \in U$ für alle $n \geq n_0$. Genau dann also, wenn

$$\forall \varepsilon > 0,\; k \in \mathbb{N},\; f_1, \dots, f_k \in C_K^+(E) \;\exists n_0 \in \mathbb{N} : |\langle f_i, \mu_n\rangle - \langle f_i, \mu\rangle| < \varepsilon \;\forall n > n_0,\; i = 1, \dots, k.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\big(\langle f_1, \mu_n\rangle, \dots, \langle f_k, \mu_n\rangle\big) \xrightarrow{n\to\infty} \big(\langle f_1, \mu\rangle, \dots, \langle f_k, \mu\rangle\big)$$

für alle $k \in \mathbb{N},\; f_1, \dots, f_k \in C_K^+(E) \iff \mu_n \xrightarrow{v} \mu$. □

2.2.6 Bezeichnung In einem beliebigen Raum X bezeichnen wir für $A \subset X$ mit $\mathbb{I}_A$ die Abbildung

$$\mathbb{I}_A : X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\; x \longmapsto \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

$\mathbb{I}_A$ heißt die **Charakteristische Funktion (oder auch Indikatorfunktion)** von A.

Der Begriff der vagen Topologie hängt zunächst von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger ab. Wenn wir Charakteristische Funktionen in unsere Argumentationen einbeziehen wollen, so müssen wir also erst einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Klassen von Abbildungen herstellen. Die wichtigsten Punkte beschreibt folgendes Lemma:

2.2.7 Lemma *Es sei E ein lokal kompakter, polnischer Raum.*

(1) Ist $K \subset E$ kompakt, so existieren kompakte Mengen $K_n \searrow K$ und eine (punktweise) monoton steigende Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_K^+(E)$ mit

$$\mathbb{I}_K \leq f_n \leq \mathbb{I}_{K_n} \text{ und } \mathbb{I}_{K_n} \searrow \mathbb{I}_K.$$

(2) Ist $G \subset E$ offen, so existieren offene, relativ kompakte Mengen $G_n \nearrow G$ und eine (punktweise) monoton fallende Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_K^+(E)$ mit

$$\mathbb{I}_G \geq g_n \geq \mathbb{I}_{G_n} \text{ und } \mathbb{I}_{G_n} \nearrow \mathbb{I}_G.$$

Beweis. *(1)*: Nach Lemma 1.2.5 auf Seite 32 gibt es eine aufsteigende Mengenfolge $(R_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus offenen, relativ kompakten Mengen mit $R_j \nearrow E$. Da K kompakt ist und $K \subset E = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$K \subset \bigcup_{j=i}^{m} R_m = R_m.$$

R_m ist offen, also ist R_m^c abgeschlossen und da R_m^c und K disjunkt sind, gilt für eine Metrik ρ auf E: $\rho(R_m^c, K) > 0$ (vgl. Lemma 1.1.58 auf Seite 30). Für positive $\varepsilon < \rho(R_m^c, K)$ ist somit

$$K \subset K^{(\varepsilon)} := \{x \in E \mid \rho(x, K) \leq \varepsilon\} \subset R_m.$$

Da K abgeschlossen ist, gilt für jedes $x \in K^c$, dass $\rho(x, K) > 0$. Also gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $x \notin K^{(\varepsilon)}$ und daher gilt $K^{(\varepsilon)} \searrow K$ für $\varepsilon \searrow 0$.
Für eine Abbildung $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definieren wir den Positivteil $h^+ : E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ x \longmapsto \max\{h(x), 0\}$. Ist h stetig, so ist auch h^+ stetig. Wir setzen nun für ein hinreichend kleines positives ε wie oben

$$f^{(\varepsilon)} : E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ x \longmapsto \left(1 - \frac{\rho(x, K)}{\varepsilon}\right)^+.$$

Offenbar gilt für den Träger $S_{f^{(\varepsilon)}}$ von $f^{(\varepsilon)}$, dass $S_{f^{(\varepsilon)}} = K^{(\varepsilon)} \subset R_m$ ist, also ist $f^{(\varepsilon)} \in C_K^+(E)$ (für hinreichend kleine ε). $f^{(\varepsilon)}$ ist gleich 1 auf K und gleich 0 auf $K^{(\varepsilon)}$. Demnach ist

$$\mathbb{I}_K \leq f^{(\varepsilon)} \leq \mathbb{I}_{K^{(\varepsilon)}} \searrow \mathbb{I}_K.$$

Setzen wir für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ $K_n := K^{(\frac{1}{n})} \searrow K$ und $f_n := f^{(\frac{1}{n})}$ (wähle für zu kleine n zum Beispiel geeignete konstante Werte, etwa diejenigen, die auch zum kleinsten hinreichend großen n_0 gehören) so folgt die Behauptung unmittelbar.

(2): Wir zeigen die Behauptung zunächst für relativ kompakte G. Ähnlich zu obigem Beweis definieren wir für eine Metrik ρ auf E und ein $n \in \mathbb{N}$

$$G_n := \{x \in E \mid \rho(x, G^c) > n^{-1}\}.$$

G_n ist offen, relativ kompakt und es gilt $G_n \nearrow G^\circ = G$, denn für jedes $x \in G$ gilt $d(x, G^c) > 0$.

Der Träger S_{g_n} der stetigen Abbildung

$$g_n : E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ x \longmapsto (1 - n\rho(x, G_n))^+$$

ist eine Teilmenge von G, also kompakt, d.h. $g_n \in C_K^+(E)$. Da G_n und g_n die gewünschte Eigenschaft haben ist damit der Beweis für relativ kompakte offene Mengen erbracht.

Betrachten wir nun den Fall, dass also G nicht relativ kompakt ist: Es sei $(R_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Mengenfolge aus offenen, relativ kompakten Mengen mit $R_j \nearrow E$ (siehe Lemma 1.2.5 auf Seite 32). Dann gibt es für alle $j \in \mathbb{N}$ eine (punktweise) monoton wachsende Funktionenfolge $g_{j,n}$ und Mengen $G_{j,n} \nearrow G \cap R_j$ mit

$$\mathbb{I}_{G\cap R_j} \geq g_{j,n} \geq \mathbb{I}_{G_{j,n}} \nearrow \mathbb{I}_{G\cap R_j}.$$

Die Funktionenfolge $g_n : E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ x \longmapsto \max\{g_{i,n}(x) | i = 1, \ldots, n\}$ und die Mengen $G_n := G_{n,n}$ haben dann die gewünschten Eigenschaften. □

2.2.8 Satz *In einem lokal kompakten, polnischen Raum E ist ein Radon-Maß μ eindeutig durch die $\langle f, \mu\rangle$ mit $f \in C_K^+(E)$ festgelegt. Insbesondere ist damit $M_+(E)$ versehen mit der vagen Topologie ein Hausdorff-Raum.*

Beweis. Sei $\mu \neq \nu$. Dann gibt es eine kompakte Menge $K \subset E$ mit $\mu[K] \neq \nu[K]$, denn $\mathfrak{B}(E)$ wird von den kompakten Teilmengen von E erzeugt. Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $\mu[K] > \nu[K]$ ist. Gemäß Lemma 2.2.7 auf Seite 52 gibt es dann eine Folge von $f_n \in C_K^+(E)$, so dass $f_n \searrow \mathbb{I}_K$ und nach dem Satz von der dominierten Konvergenz (Satz 2.1.31 auf Seite 49)

$$\langle f_n, \mu \rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle \mathbb{I}_K, \mu \rangle > \langle \mathbb{I}_K, \nu \rangle \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} \langle f_n, \nu \rangle.$$

Demnach muss es ein f_{n_0} mit $\langle f_{n_0}, \mu \rangle \neq \langle f_{n_0}, \nu \rangle$ geben, womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist.

Um die Hausdorff Eigenschaft nachzuweisen folgern wir aus dem ersten Teil des Satzes, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $\langle f_{n_0}, \mu \rangle - \varepsilon > \langle f_{n_0}, \nu \rangle + \varepsilon$, d.h.

$$\left\{ \eta \in M_+(E) \;\middle|\; |\langle f_{n_0}, \eta \rangle - \langle f_{n_0}, \mu \rangle| < \varepsilon \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \eta \in M_+(E) \;\middle|\; |\langle f_{n_0}, \eta \rangle - \langle f_{n_0}, \nu \rangle| < \varepsilon \right\}$$

sind disjunkte Umgebungen von μ und ν (vgl. Lemma 2.2.4 auf Seite 51). □

Kompaktheit und relative Kompaktheit sind wichtige topologische Begriffe. Wie in Kapitel 1 erwähnt sind kompakte Mengen in gewisser Hinsicht „klein" und es gilt, dass Folgen in dieser „kleinen" Menge zumindest konvergente Teilfolgen mit Grenzwert in der Menge selbst besitzen (vgl. Satz 1.1.50 auf Seite 27).
Diese Eigenschaft ist besonders nützlich, da sie uns erlaubt Konvergenz zu beweisen, indem wir die Gleichheit der Grenzwerte aller konvergenten Teilfolgen nachweisen (vgl. Lemma 1.1.45 auf Seite 26).
Der folgende Satz ist ein nützliches Hilfsmittel für den Nachweis relativer Kompaktheit:

2.2.9 Satz *Sei E polnisch und M eine Teilmenge von $M_+(E)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) M ist relativ kompakt bezüglich der vagen Topologie auf $M_+(E)$,

(2) $\sup_{\mu \in M} \langle f, \mu \rangle < \infty$ für alle $f \in C_K^+(E)$,

(3) $\sup_{\mu \in M} \mu[B] < \infty$ für alle relativ kompakten Mengen $B \in \mathfrak{B}(E)$.

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir zunächst einen Hilfssatz, der uns die Existenz von Radon-Maßen μ mit charakterisierenden Werten für die Integrale $\langle f, \mu \rangle$, $f \in C_K^+(E)$ garantiert.

2.2.10 Satz ***Riesz'scher Darstellungssatz*** *Sei E ein lokal kompakter, polnischer Raum und $\Psi : C_K^+(E) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ ein Funktional, so dass gilt*

$$r, s \in \mathbb{R}_0^+,\; f, g \in C_K^+(E) \;\Rightarrow\; \Psi(rf + sg) = r\Psi(f) + s\Psi(g).$$

Dann gibt es ein Radon-Maß μ auf E mit

$$\Psi(f) = \langle f, \mu \rangle \quad \text{für alle } f \in C_K^+(E).$$

(Siehe [Elstrodt, 2009] S.335.)

Beweis von Satz 2.2.9. *(1)⇒(2)*: Nach Definition der vagen Topologie ist für jedes $f \in C_K^+(E)$ die Abbildung

$$f^* : M_+(E) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \; \mu \longmapsto \langle f, \mu \rangle$$

stetig. Da Kompaktheit und somit auch relative Kompaktheit unter stetigen Abbildungen erhalten bleibt, ist $f^*(M)$ relativ kompakt (insb. ist also $\overline{f^*(M)}$ kompakt), also

$$\sup_{\mu \in M} \langle f, \mu \rangle = \sup f^*(M) \leq \sup \overline{f^*(M)} \overset{kp.}{<} \infty.$$

(1)⇐(2): Zunächst machen wir uns klar, dass für beliebige Mengen $A \subset \mathbb{R}$ $\sup(A) = \sup(\overline{A})$ gilt. Da $A \subset \overline{A}$ ist, gilt offensichtlich $\sup(A) \leq \sup(\overline{A})$. Ist $a \in \overline{A}$, so gibt es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $a_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$. Da $a_n \leq \sup(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, muss auch $a \leq \sup(A)$ sein. Da $a \in \overline{A}$ beliebig gewählt war, ist $\sup(A)$ damit größer oder gleich dem Supremum von $\overline{A}$. Nach Voraussetzung ist $\sup_{\mu \in M} \langle f, \mu \rangle < \infty$ und mit obiger Überlegung erhalten wir:

$$\sup_{\mu \in \overline{M}} \langle f, \mu \rangle = \sup(f^*(\overline{M})) \overset{\textit{Satz 1.1.33}}{\leq} \sup(\overline{f^*(M)}) = \sup(f^*(M)) = \sup_{\mu \in M} \langle f, \mu \rangle < \infty.$$

Für $f \in C_K^+(E)$ definieren wir

$$X_f := [0, \sup_{\mu \in \overline{M}} \langle f, \mu \rangle].$$

X_f versehen mit der relativen Topologie $\mathcal{T}(d_2)_{|X_f}$ von $\mathbb{R}$ auf X_f ist kompakt. Nach dem Satz von Tychonoff (Satz 1.1.59 auf Seite 30) ist somit

$$X := \prod_{f \in C_K^+(E)} X_f$$

kompakt bezüglich der zugehörigen Produkttopologie. Betrachte die Abbildung

$$T : \overline{M} \longrightarrow A := \left\{ (\langle f, \mu \rangle)_{f \in C_K^+(E)} \;\middle|\; \mu \in \overline{M} \right\} \subset X, \; \mu \longmapsto \big(\langle f, \mu \rangle \big)_{f \in C_K^+(E)}.$$

Diese Abbildung ist offensichtlich surjektiv und nach Satz 2.2.8 auf Seite 53 auch injektiv. Weiterhin ist laut Lemma 1.1.55 auf Seite 28

$$\mathcal{V}(x) := \left\{ \bigcap_{i=1}^{k} \left\{ y \in A \;\middle|\; |\pi_{f_i}(y) - \pi_{f_i}(x)| < \varepsilon \right\} \;\middle|\; \varepsilon > 0, \; k \in \mathbb{N}, \; f_1, \dots f_k \in C_K^+(E) \right\}$$

eine Umgebungsbasis von x in A (wobei π_f die Projektion von X auf X_f bezeichnet). Ist $\mathcal{U}(\mu)$ die Umgebungsbasis aus Lemma 2.2.4 auf Seite 51, so gilt für alle $\mu \in \overline{M}$ und $U \in \mathcal{U}(\mu)$, dass $T(U) \in \mathcal{V}(T(\mu))$ ist. Umgekehrt gilt für $x \in A$ und $V \in \mathcal{V}(x)$, dass $(T^{-1})(V) \in \mathcal{U}(T^{-1}(x))$ ist. Diese Bedingungen sind hinreichend für die Stetigkeit von T und T^{-1}: Ist etwa $\mu \in \overline{M}$ und $V \in \mathcal{V}(T(\mu))$ eine Umgebung von $T(\mu)$, so ist $T^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x))$ eine Umgebung von μ und $T(T^{-1}(V)) = V$, d.h. T ist stetig. Analog zeigt man die Stetigkeit von T^{-1}, also T ein Homöomorphismus.

Wir zeigen nun, dass A in X abgeschlossen ist: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. Es ist zu zeigen, dass dann x in $A = T(\overline{M})$ liegt. Wir verwenden die Notationen $a_n = (a_{f,n})_{f\in C_K^+(E)}$ und $x = (x_f)_{f\in C_K^+(E)}$. Da $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein ein Radon-Maß $\mu_n \in \overline{M}$ mit $a_{f,n} = \langle f, \mu_n\rangle$ für alle $f \in C_K^+(E)$. Setzten wir nun

$$\Psi : C_K^+(E) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ f \longmapsto x_f,$$

so erfüllt Ψ die Voraussetzungen von Satz 2.2.10 auf Seite 54, denn für $r, s \in \mathbb{R}$ und $f, g \in C_K^+(E)$ ist

$$\begin{aligned}\Psi(rf + sg) &= x_{rf+sg} = \lim_{n\to\infty}\langle rf + sg, \mu_n\rangle = r\lim_{n\to\infty}\langle f, \mu_n\rangle + s\lim_{n\to\infty}\langle g, \mu_n\rangle \\ &= rx_f + sx_g = r\Psi(f) + s\Psi(g).\end{aligned}$$

Also gibt es ein μ in $M_+(E)$ mit $x_f = \langle f, \mu\rangle$ für alle $f \in C_K^+(E)$. Es gilt $\lim_{n\to\infty}\langle f, \mu_n\rangle = \langle f, \mu\rangle$ für alle $f \in C_K^+(E)$, d.h. $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Da die μ_n in $\overline{M}$ liegen, muss damit auch $\mu \in \overline{M}$ sein, also ist $x \in T(\overline{M}) = A$.

Da also X kompakt und A eine abgeschlossene Teilmenge von X ist, ist A ein kompakter Raum. Homöomorphie erhält Kompaktheit (Satz 1.1.40 auf Seite 23), damit ist auch $\overline{M}$ ein kompakter Raum. Nach Satz 1.1.23 auf Seite 17 ist $\overline{M}$ damit eine kompakte Teilmenge von $M_+(E)$, also ist M relativ kompakt.

(2)⇐(3): Sei $f \in C_K^+(E) \subset C_b^+(E)$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) \leq m$ für alle $x \in E$. Für den Träger S_f von f ist demnach $f \leq m\mathbb{I}_{S_f}$ und somit

$$\sup_{\mu\in M}\langle f, \mu\rangle \leq m\sup_{\mu\in M}\langle \mathbb{I}_B, \mu\rangle = m\sup_{\mu\in M}\mu[B] < \infty,$$

denn S_f ist relativ kompakt nach Voraussetzung.

(2)⇒(3): Sei $B \in E$ relativ kompakt, also $\overline{B}$ kompakt. Nach Lemma 2.2.7 auf Seite 52 gibt es dann ein $f_1 \in C_K^+(E)$ mit $f_1 \geq \mathbb{I}_{\overline{B}}$ und somit

$$\sup_{\mu\in M}\mu[B] \leq \sup_{\mu\in M}\mu[\overline{B}] = \sup_{\mu\in M}\langle \mathbb{I}_{\overline{B}}, \mu\rangle \leq \sup_{\mu\in M}\langle f_1, \mu\rangle < \infty. \qquad \square$$

Wir wollen abschließend beweisen, dass $M_+(E)$ polnisch, also vollständig metrisierbar und separabel ist. Separable, metrische Räume sind genau die metrisierbaren Räume, die eine derart „kleine“ Topologie besitzen, dass diese sich durch eine abzählbar unendliche Basis erzeugen lässt (vgl. „Separable Räume“ in Abschnitt 1.1).
Das folgende Lemma liefert uns eine abzählbare Menge aus Funktionen, die es uns erlaubt eine Metrik auf $M_+(E)$ zu definieren, indem wir den (bei 1 abgeschnittenen) Betrag der Differenzen der Integrale der entsprechenden Funktionen über E bezüglich zweier Maße aufsummieren (abzählbare Anzahl von Summanden). Entscheidend ist, dass die Funktionen dieser Familie bereits als Testfunktionen ausreichen werden um vage Konvergenz nachzuweisen.

2.2.11 Lemma *Ist E lokal kompakt und polnisch, so gibt es eine abzählbare Teilmenge*

$$H = \{h_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

von $C_K^+(E)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Sind μ und ν aus $M_+(E)$ und $\langle h_i, \mu \rangle = \langle h_i, \nu \rangle$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so ist $\mu = \nu$.

(2) Sind $\mu_1, \mu_2, \ldots \in M_+(E)$ und gibt es für jedes $h_i \in H$ ein $c_i \in \mathbb{R}$ mit $\langle h_i, \mu_n \rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c_i$, so konvergiert μ_n vag gegen ein $\mu \in M_+(E)$ mit $\langle h_i, \mu \rangle = c_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Beachte, dass der Grenzwert aus (2) durch (1) eindeutig bestimmt ist.

Beweis. Zunächst konstruieren wir uns eine geeignete Menge H: Nach Lemma 1.2.5 auf Seite 32 gibt es für die Topologie auf E eine bezüglich endlicher Vereinigungen und Schnitte abgeschlossene abzählbare Basis $\mathcal{G} := \{G_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ aus relativ kompakten Mengen. Laut Lemma 2.2.7 auf Seite 52 gibt es dann Folgen $(f_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_K^+(E)$ mit

$$f_{i,n} \searrow \mathbb{I}_{\overline{G_i}} \text{ und } g_{i,n} \nearrow \mathbb{I}_{G_i} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Die Menge

$$H := \{f_{i,n} \mid i,n \in \mathbb{N}\} \cup \{g_{i,n} \mid i,n \in \mathbb{N}\}$$

ist offensichtlich abzählbar.

(1): Jede offene Menge in E ist eine abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{G}$ und somit $\sigma(\mathcal{G}) \supset \mathcal{T}_E \Rightarrow \sigma(\mathcal{G}) \supset \sigma(\mathcal{T}_E) = \mathfrak{B}(R)$, also ist $\mathcal{G}$ ein schnittstabiler Erzeuger von $\mathfrak{B}(E)$. Nach Satz 2.1.3 auf Seite 40 ist es damit hinreichend, zu zeigen, dass $\mu[G] = \nu[G]$ für alle $G \in \mathcal{G}$ gilt. Sei hierzu $G_i \in \mathcal{G}$, dann gibt es eine Folge $(g_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ in H mit $g_{i,n} \nearrow \mathbb{I}_{G_i}$ und demnach

$$\mu[G_i] = \langle \mathbb{I}_{G_i}, \mu \rangle \underset{\textit{Satz } 2.1.30}{\overset{\textit{mon.Konv.}}{=}} \lim_{n\to\infty} \langle g_{i,n}, \mu \rangle \overset{\textit{Vor.}}{=} \lim_{n\to\infty} \langle g_{i,n}, \nu \rangle \overset{\textit{mon.Konv.}}{=} \langle \mathbb{I}_{G_i}, \nu \rangle = \nu[G_i].$$

(2): Wir zeigen zunächst, dass unter den gegebenen Voraussetzungen $\{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt ist:

Betrachte eine beliebige Funktion $\varphi \in C_K^+(E)$. Da dann der Träger S_φ von φ kompakt ist und da $\bigcup_{i=1}^\infty G_i = E$, gibt es eine endliche Menge $I \subset \mathbb{N}$ mit $S_\varphi \subset \bigcup_{i\in I} G_i$. Aufgrund der Abgeschlossenheit von $\mathcal{G}$ bezüglich endlicher Vereinigungen gibt es sogar ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$S_\varphi \subset G_{i_0} \in \mathcal{G}.$$

für $\|\varphi\|_\infty := \sup\{|\varphi(x)| \mid x \in E\} < \infty$ ist

$$\varphi \leq \|\varphi\|_\infty \mathbb{I}_{S_\varphi} \leq \|\varphi\|_\infty \mathbb{I}_{G_{i_0}} \leq \|\varphi\|_\infty \mathbb{I}_{\overline{G_{i_0}}} \leq \|\varphi\|_\infty f_{i_0,n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Voraussetzung gibt es für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $c_i \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} \langle h_i, \mu_n \rangle = c_i$, also ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} \langle h_i, \mu_n \rangle \leq \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Da $f_{i_0,n} \in H$ ist, gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $f_{i_0,n} = h_j$. Daher gilt:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \langle \varphi, \mu_n \rangle \leq \|\varphi\|_\infty \sup_{n\in\mathbb{N}} \langle f_{i_0,n}, \mu_n \rangle \leq \|\varphi\|_\infty \sup_{n\in\mathbb{N}} \langle h_j, \mu_n \rangle < \infty.$$

Dies ist laut Satz 2.2.9 auf Seite 54 äquivalent zur relativen Kompaktheit von $\{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Sei nun $\{n'\}$ eine Teilfolge von $\{n\}$. Da $\{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt ist, gibt es gemäß Satz 1.1.50 auf Seite 27 eine Teilfolge $\{n''\}$ von $\{n'\}$ und ein Maß $\mu \in \overline{\{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}} \subset M_+(E)$ mit

$$\mu_{n''} \xrightarrow{v} \mu.$$

Somit gilt für alle $i \in \mathbb{N}$ $\langle h_i, \mu_n \rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle h_i, \mu \rangle$ und nach Voraussetzung muss dieser Grenzwert gleich c_i sein. Gemäß *(1)* ist μ damit eindeutig definiert. Daher besitzt jede Teilfolge $\{n''\}$ von $\{n\}$ eine Teilfolge $\{n'\}$ mit dem gemeinsamen Grenzwert $v\text{-}\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$. □

2.2.12 Theorem *Ist E lokal kompakt und polnisch, so ist auch $M_+(E)$ bezüglich der vagen Topologie $\mathcal{T}_v(M_+(E))$ polnisch.*

Beweis. Wir definieren uns mit Hilfe der $h_i \in H$ aus Lemma 2.2.11 folgende Metrik:

$$d(\mu,\nu) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \min\bigl\{1, |\langle h_i, \mu\rangle - \langle h_i, \nu\rangle|\bigr\}$$

Behauptung.

(1) Die Abbildung $d : M_+(E) \times M_+(E) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ ist wirklich eine Metrik auf $M_+(E)$,

(2) Die Metrik d erzeugt $\mathcal{T}_v(M_+(E))$,

(3) Die Metrik d ist vollständig (d.h. jede Cauchy Folge bezüglich d hat einen Grenzwert in $M_+(E)$),

(4) E ist separabel.

Zu *(1)*: Man sieht sofort, das d symmetrisch ist. Die Dreiecksungleichung lässt sich leicht summandenweise einsehen und die Definitheit folgt aus Lemma 2.2.11.

Zu *(2)*: Wir zeigen: Ist $U(\mu)$ eine Umgebung von μ, so gibt es eine (offene) δ-Kugel

$$K_\delta(\mu) := \bigl\{\nu \in M_+(E) \bigm| d(\mu,\nu) < \delta\bigr\} \subset U(\mu).$$

Sei also $\mu \in M_+(E)$ beliebig gewählt. Für $\delta \to 0$ geht $\sup\{d(\mu,\nu) \mid \nu \in K_\delta(\mu)\}$ gegen 0. Aus der Definition von d ergibt sich dann, dass $\sup\bigl\{|\langle h_i,\mu\rangle - \langle h_i,\nu\rangle| \bigm| \nu \in K_\delta(\mu)\bigr\} \to 0$ für $\delta \to 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Somit gilt für jede Folge $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\nu_n \in K_{n^{-1}}(\mu)$ die vage Konvergenz $\nu_n \xrightarrow{v} \mu$.
Gemäß Satz 2.2.5 auf Seite 51 ist vage Konvergenz gleich topologischer Konvergenz bezüglich der vagen Topologie und daher gibt es für jede Umgebung $U(\mu)$ von μ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\nu_n \in U(\mu)$ für alle $n \geq n_0$. Da die ν_n frei aus $K_{n^{-1}}(\mu)$ ausgewählt waren, liegt also ganz $K_{n_0^{-1}}(\mu)$ in $U(\mu)$. Lässt man δ in $\mathbb{Q}$ gegen 0 gehen, so erhält man mit $\bigl\{K_\delta(\mu) \bigm| \delta \in \mathbb{Q}\bigr\}$ über dies hinaus eine abzählbare Umgebungsbasis von μ.

Es bleibt zu zeigen, dass die $K_\delta(\mu)$ auch wirklich offen bezüglich $\mathcal{T}_v(M_+(E))$ sind. Hierzu zeigt man, dass jedes $\nu \in K_\delta(\mu)$ ein innerer Punkt von $K_\delta(\mu)$ ist. Wir zeigen präziser, dass es für jedes $\nu \in K_\delta(\mu)$ eine Menge $V(\nu)$ aus der Umgebungsbasis $\mathcal{U}(\nu)$ aus Lemma 2.2.4 auf Seite 51 gibt mit $\nu \in V(\nu) \subset K_\delta(\mu)$. Dies ist aber klar, wenn man mit der Notation aus Lemma 2.2.4 ε hinreichend klein, $f_i = h_i$ für $i = 1, \ldots, k$ und $k \in \mathbb{N}$ hinreichend groß wählt.

Zu *(3)*: Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge bezüglich d. Dann gilt nach Definition einer Cauchy Folge

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} d(\mu_n, \mu_{n+m}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nach Definition von d gilt dann notwendig

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} |\langle h_i, \mu_n\rangle - \langle h_i, \mu_{n+m}\rangle| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also ist $(\langle h_i, \mu_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ eine Cauchy Folge im Banachraum $\mathbb{R}$ und somit konvergent. Es gibt also für alle $i \in \mathbb{N}$ ein $c_i \in \mathbb{R}$ mit $\langle h_i, \mu_n\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c_i$. Dies ist nach Lemma 2.2.11 auf Seite 57 hinreichend für die Konvergenz (und insbesondere für die Existenz eines geeigneten Grenzwertes $\mu \in M_+(E)$) von $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Zu *(4)*: Wir zeigen äquivalent, dass es eine abzählbare Basis von $\mathcal{T}_v(M_+(E))$ gibt (siehe Lemma 1.2.3 auf Seite 31):
Das Mengensystem

$$\mathcal{S} := \Big\{ \big\{ \mu \in M_+(E) \;\big|\; \langle h_i, \mu\rangle \in (r,s) \big\} \;\Big|\; i \in \mathbb{N},\; r, s \in \mathbb{Q},\; 0 \le r < s \Big\}$$

ist sicherlich abzählbar. Ist ein Mengensystem abzählbar, so ist auch das Mengensystem, dass aus allen endlichen Schnitten von Elementen aus diesem Mengensystem besteht, abzählbar. Also ist eine Basis zur Subbasis $\mathcal{S}$ abzählbar. Ähnlich wie in *(2)* muss man also zeigen, dass alle $S \in \mathcal{S}$ offen sind und dass für alle $\mu \in M_+(E)$ und $V \in \mathcal{T}_v(M_+(E))$ mit $\mu \in V$ Mengen $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ existieren mit $\mu \in S_1 \cap \ldots \cap S_n \subset V$.
Man sieht die Offenheit der $S \in \mathcal{S}$ am schnellsten, indem man für einen Punkt $\nu \in S$ wie in *(1)* auf die Umgebungsbasen $\mathcal{U}(\nu)$ aus dem Lemma 2.2.4 auf Seite 51 zurückgreift. Hierzu braucht man nur für das entsprechende $i \in \mathbb{N}$ $f_i = g_i$ und $\varepsilon < \min\big\{s - \langle h_i, \nu\rangle, \langle h_i, \nu\rangle - r\big\}$ zu wählen. Um zu zeigen, dass es für jedes $\mu \in M_+(E)$ und jede Umgebung U von μ eine Menge aus der von $\mathcal{S}$ erzeugten Basis $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ gibt, reicht es, diese Aussage für $U = K_\varepsilon(\mu)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ zu zeigen. Wir setzten hierzu

$$S_{i,\delta_i,\delta_i'} := \big\{ \nu \in M_+(E) \;\big|\; \langle h_i, \nu\rangle \in (\langle h_i, \mu\rangle - \delta_i, \langle h_i, \mu\rangle + \delta_i') \big\} \subset \mathcal{S}$$

Wählen wir $\delta_i > \delta_i' > 0$ derart, dass $\langle h_i, \mu\rangle - \delta_i$ und $\langle h_i, \mu\rangle + \delta_i'$ in $\mathbb{Q}$ liegen, so gilt,dass die $S_{i,\delta_i,\delta_i'} \in \mathcal{S}$ sind. Weiterhin ist

$$d(\mu, \nu) \le \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} \cdot \delta_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} \cdot 1 \le \max\{\delta_i | i \le n\} + 2^{-n}.$$

Also braucht man nur $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß und die δ_i, δ_i' (unter Berücksichtigung obiger Bedingungen) hinreichend klein zu wählen, um $\bigcap_{i=1}^{n} S_{i,\delta} \subset K_\varepsilon(\mu)$ zu erreichen. Man wähle hierzu etwa $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $2^{-n} < 2^{-1}\varepsilon$ und $\delta_1, \dots \delta_n, \delta'_1, \dots, \delta'_n \in \mathbb{R}$ die obigen Bedingungen genügen und für die außerdem $0 < \delta_1, \dots, \delta_n, \leq 2^{-1}\varepsilon$ gilt. Beachte, dass derartige δ_i existieren, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. □

Nun, da wir wissen, dass für lokal kompakte, polnische Räume E der Raum $M_+(E)$ metrisierbar ist, haben wir das Hilfsmittel der Folgenstetigkeit zur Verfügung, um Stetigkeit nachzuweisen. Somit können wir ohne großen Aufwand folgenden nützlichen Satz über die Stetigkeit von Abbildungen zwischen Räumen $M_+(E_1)$ und $M_+(E_2)$ beweisen:

2.2.13 Satz *Seien E_1 ein lokal kompakter und polnischer Raum und E_2 ein beliebiger topologischer Raum. Ist $f : E_1 \longrightarrow E_2$ stetig und ist $f^{-1}(K)$ für jeden kompakten Teilraum K von E_2 relativ kompakt in E_1, so ist die induzierte Abbildung*

$$\overline{f} : M_+(E_1) \longrightarrow M_+(E_2), \mu \longmapsto \mu \circ f^{-1}$$

stetig. Insbesondere dies natürlich, wenn f ein Homöomorphismus ist.

Beweis. Nach Satz 1.1.52 auf Seite 27 ist Stetigkeit (bzgl. der vagen Topologie) äquivalent zu Folgenstetigkeit (bezüglich vager Konvergenz). Um die Folgenstetigkeit zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass für eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M_+(E_1)$ gilt:

$$\mu_n \xrightarrow{v} \mu \;\Rightarrow\; \overline{f}(\mu_n) \xrightarrow{v} \overline{f}(\mu).$$

Sei also $g \in C_K(E_2)$, dann ist

$$(g \circ f)^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})}_{\textit{relativ kompakt}}) \subseteq f^{-1}(\underbrace{\overline{g^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})}}_{\textit{kompakt}})$$

relativ kompakt nach Voraussetzung und somit hat $g \circ f$ ebenfalls einen kompakten Träger. Da $g \circ f$ stetig ist, liegt es in $C_K(E_1)$. Also gilt nach der Definition der vagen Konvergenz $\int_{E_1} g \circ f \; d\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{E_1} g \circ f \; d\mu$. Mit Hilfe der Transformationsformel für Integrale (Satz 2.1.7 auf Seite 42) folgt nun:

$$\int_{E_2} g \; d\mu_n \circ f^{-1} = \int_{E_1} g \circ f \; d\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{E_1} g \circ f \; d\mu = \int_{E_2} g \; d\mu \circ f^{-1}.$$

Somit ist $\overline{f}(\mu_n) \xrightarrow{v} \overline{f}(\mu)$ gezeigt. □

2.3 DC-Semiringe

Vage Konvergenz von Maßen $\mu_n \in M_+(E)$ ist definiert als die Konvergenz der Integrale $\int_E f\ d\mu_n$ aller „Testfunktionen“ $f \in C_K^+(E)$ über E. Bisher haben wir noch keinen direkten Zusammenhang zwischen vager Konvergenz von Maßen und der Konvergenz der charakteristischen Funktionen von Teilmengen von E beziehungsweise der Konvergenz der „Auswertungsfunktionen“ $\mu_n[A]$ von Mengen $A \in \mathfrak{B}(E)$ kennen gelernt. Folgendes Beispiel verdeutlicht dass die Folgerung „$\mu_n \xrightarrow{v} \mu \Rightarrow \mu_n[B] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu[B]$ für alle (relativ kompakten) $B \in \mathfrak{B}(E)$“ nicht zulässig ist:
Sei $E = \mathbb{R}$, versehen mit der euklidischen Metrik und μ, μ_1, μ_2 die Maße auf $\mathbb{R}$ mit $\mu_n[A] := \mathbb{I}_A(n^{-1})$ und $\mu[A] := \mathbb{I}_A(0)$. Dann gilt $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Aber $\langle \mathbb{I}_{(0,1]}, \mu_n \rangle$ ist gleich 1 für alle $n \in \mathbb{N}$, während $\langle \mathbb{I}_{(0,1]}, \mu \rangle = 0$ ist. Das Problem besteht darin, dass μ „Masse“ auf dem Rand von $(0,1]$ hat, während die „Masse“ der μ_n zwar „zum Rand hin wandert“, aber immer im Inneren bleibt. Es ist also nahe liegend, Forderungen an die Mengen, bezüglich der „Masse“ auf ihren Rändern zu stellen.
Ein wichtiges Mengensystem in diesem Zusammenhang ist $\mathfrak{R}_\mu(E)$, die Klasse aller messbaren relativ kompakten Mengen, deren Rand „μ-Masse“ Null hat. Dieses Mengensystem kann allerdings immer noch relativ „groß“ und unhandlich sein. Um konkrete Konvergenzen nachzuweisen, ist es daher oft sinnvoll, sich mit geeigneten Teilklassen von $\mathfrak{R}_\mu(E)$ zu beschäftigen, die auf der einen Seite hinreichend viele Informationen für Konvergenzaussagen enthalten, auf der anderen Seite aber in gewisser Weise „klein“ genug – beispielsweise parametrisierbar – sind, so dass man bestimmte Bedingungen an sie konkret nachrechnen kann.
Solch ein Mengensystem ist der DC-Semiring, ein Semiring aus relativ kompakten, messbaren Mengen, der für jede gegebene messbare relativ kompakte Menge eine endliche Überdeckung aus Mengen beliebig kleinen Durchmessersenthält. Der Begriff des DC-Semirings wird auch bei der Konvergenz in Verteilung von Zufälligen Maßen (Abschnitt 2.7) eine Rolle spielen und auch dort werden uns die in diesem Abschnitt bewiesenen Aussagen von Nutzen sein.

2.3.1 Bezeichnung Es sei E ein lokal kompakter, polnischer Raum und μ und Maß auf E. Wir verwenden folgende Notationen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}(E) &:= \big\{E \in \mathfrak{B}(E) \;\big|\; E \textit{ ist relativ kompakt}\big\}\\
\mathfrak{R}_\mu(E) &:= \big\{E \in \mathfrak{B}(E) \;\big|\; E \in \mathfrak{R}(E),\ \mu[\partial E] = 0\big\}\\
\mathfrak{R}_\mu^\circ(E) &:= \big\{E \in \mathfrak{B}(E) \;\big|\; E \in \mathfrak{R}(E),\ E \textit{ offen},\ \mu[\partial E] = 0\big\}.
\end{aligned}$$

2.3.2 Definition (DC-System) Ist E ein lokal kompakter, polnischer Raum und d eine die Topologie $\mathcal{T}$ auf E erzeugende Metrik, so heißt ein Mengensystem $\mathcal{A}$ auf E **DC-System** (**d**issecting, **c**overing) auf E, falls $\mathcal{A} \subset \mathfrak{R}(E)$ und

(DC) Für alle $R \in \mathfrak{R}(E)$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $A_1, \dots A_n \in \mathcal{A}$ mit

$$d(A_i) := \sup_{a,b \in A_i} \big(d(a,b)\big) < \varepsilon \quad \textit{und} \quad R \subset \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

2.3.3 Bemerkung Der Begriff des DC-Systems hängt nur von der Topologie $\mathcal{T}$ auf E, nicht von der Wahl einer konkreten Metrik d ab (siehe [Kallenberg, 1975] S. 3 f.).

2.3.4 Definition (DC-Semiring) Ein **DC-Semiring** ist ein Semiring aus messbaren Mengen, der ein DC-System als Teilmenge enthält.

Ein DC-System ist eng mit dem Begriff einer topologischen Basis verbunden, wie die folgenden beiden Lemmata zeigen werden.

2.3.5 Lemma *Jede Basis $\mathcal{B}$ eines lokal kompakten, polnischen Raumes E ist ein DC-System.*

Beweis. Sei d eine zur Topologie auf E passende Metrik und $R \in \mathfrak{R}(E)$. Ist $\mathcal{B}$ eine Basis auf E, $x \in E$ und

$$K_{\varepsilon'}(x) := \{y \in E \mid d(x,y) < \varepsilon'\},$$

so gibt es für jedes $\varepsilon' > 0$ eine Menge $B_{\varepsilon'}(x) \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_{\varepsilon'}(x) \subset K_{\varepsilon'}(x)$. Wählt man für gegebenes $\varepsilon > 0$ etwa $\varepsilon' = 3^{-1}\varepsilon$, so ist $d(B_{\varepsilon'}(x)) \leq d(K_{\varepsilon'}(x)) \leq 2\varepsilon' < \varepsilon$. Es gilt weiterhin

$$\overline{R} \subset \bigcup_{x \in \overline{R}} B_{\varepsilon'}(x).$$

Da $\overline{R}$ kompakt und die $B_{\varepsilon'}(x) \in \mathcal{B}$ offen sind, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in \overline{R}$, so dass

$$\overline{R} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\varepsilon'}(x_i).$$

Also ist $\mathcal{B}$ ein DC-System. □

2.3.6 Lemma *Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ ein Mengensystem auf einem lokal kompakten, polnischen Raum E. Gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von E, so dass für jedes $B \in \mathcal{B}$ ein $A \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A \subset \overline{B}$ existiert, so ist $\mathcal{A}$ ein DC-System auf E.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $d(B) = d(A)$ ist, der Rest folgt dann sofort aus Lemma 2.3.5. Es sei wieder d eine zur Topologie auf E passende Metrik. Nach Lemma 1.1.57 auf Seite 29 ist $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Seien $a, b \in \overline{B}$, dann gibt es Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Somit gilt $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = d(a, b)$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ $d(a_n, b_n) \leq \sup\{d(x,y) \mid x, y \in B\} = d(B)$ ist, ist damit auch $d(a,b) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) \leq d(B)$. Weil a und b beliebig aus $\overline{B}$ gewählt waren, ist damit $d(\overline{B}) \leq d(B)$ und somit $d(B) \leq d(A) \leq d(\overline{B}) \leq d(B)$, also $d(A) = d(B)$. □

Man beachte, dass eine Umkehrung derart „$\mathcal{A}$ ist ein DC-System $\Rightarrow \mathcal{A}' := \{A^\circ | A \in \mathcal{A}\}$ ist eine Basis“ im allgemeinen unwahr ist. Darüber hinaus lässt es sich sogar zeigen, dass $\mathcal{A}'$ nicht einmal ein DC-System sein muss. Ein Gegenbeispiel ist

$$\mathcal{A} := \left\{ \left[2^{-n}(k_n - 1), 2^{-n}k_n\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, k_n = 1, \dots 2^n \right\} \cup \emptyset.$$

$\mathcal{A}$ ist sicherlich ein DC-Semiring auf $[0,1)$ bezüglich der relativen euklidischen (d.h. von der euklidischen Metrik erzeugten) Topologie auf $\mathbb{R}$. Es gibt aber keine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $2^{-1} \in A^\circ$ und damit auch keine Überdeckung von $\{2^{-1}\}$, d.h. $\mathcal{A}'$ ist kein DC-System. Da jede Basis eines lokal kompakten, polnischen Raumes ein DC-System ist, ist $\mathcal{A}'$ auch keine Basis.

Soviel zu den rein topologischen Eigenschaften eines DC-Systems. Wir kommen nun zu einer wichtigen wahrscheinlichkeitstheoretischen Aussage über DC-Systeme:

2.3.7 Lemma *Sei E ein lokal kompakter, polnischer Raum und $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}(E)$ ein DC-System auf E, so ist $\mathcal{A}$ ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{B}(E)$.*

Beweis. Es sei $\mathcal{A}$ ein DC-System auf E. Da $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}(E)$ ist, ist $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathfrak{B}(E)) \subset \mathfrak{B}(E)$. Es reicht also, $\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{A})$ und damit $\mathfrak{B}(E) = \sigma(\mathcal{T}) \subset \sigma(\mathcal{A})$ zu zeigen. Sei hierzu zunächst G offen und relativ kompakt. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$G_n := \left\{ x \in E \,\middle|\, \rho(x, G^c) > n^{-1} \right\}.$$

G_n ist relativ kompakt und es gilt $G_n \nearrow G^\circ = G$, denn für jedes $x \in G$ ist $d(x, G^c) > 0$. Es seien nun für $n \in \mathbb{N}$ $A_{i,n}, \dots, A_{k_n,n} \in \mathcal{A}$ derart gewählt, dass $d(A_{i,n}) < n^{-1}$ und

$$G \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} A_{i,n}.$$

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $A_{i,n} \cap G \neq \emptyset$ für alle $i = 1, \dots, k_n$ und dass die $A_{i,n}$ derart angeordnet sind, dass $A_{i,n} \cap G^c = \emptyset \;\Leftrightarrow\; i \leq l_n$ für ein geeignetes $l_n \in \mathbb{N}$. Dann gilt außerdem $i > l_n \Rightarrow\; A_{i,n} \cap G_n = \emptyset$: Gibt es nämlich ein $x \in A_{i,n} \cap G_n$, so ist einerseits $d(a, x) \leq n^{-1}$ für alle $a \in A_{i,n}$ und andererseits – da x in G_n liegt – gilt $d(x, y) > n^{-1}$ für alle $y \in G^c$. Demnach ist $a \in G$ und damit $A_{i,n} \subset G$, also $i \leq l_n$. Daher gilt

$$G \supset \bigcup_{i=1}^{l_n} A_{i,n} \supset G_n \nearrow G,$$

woraus folgt, dass $G = \bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_{i=1}^{l_n} A_{i,n} \in \sigma(\mathcal{A})$ ist. Es bleibt zu zeigen, dass nicht nur jede offene, relativ kompakte, sondern auch jede allgemeine offene Menge in $\sigma(\mathcal{A})$ liegt. Dies folgt sofort aus Lemma 1.2.5 auf Seite 32, das besagt, dass in lokal kompakten, polnischen Räumen jede offene Menge die abzählbare Vereinigung offener, relativ kompakter Mengen ist. □

2.3.8 Lemma *Ist E ein lokal kompakter, polnischer Raum und ist $\mathcal{A}$ ein DC-Semiring auf E, so gilt:*

(1) Ist $n' \in \mathbb{N}$ und sind $A'_1, \dots, A'_{n'} \in \mathcal{A}$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, so dass

$$\bigcup_{i=1}^{n'} A'_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

(2) ist $R \subset E$ relativ kompakt, $n \in \mathbb{N}$ und sind $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ und $A_{n+1}, \dots, A_{n+m} \in \mathcal{A}$, so dass die $A_1, \dots, A_{n+m}$ paarweise disjunkt sind und

$$R \subset \bigcup_{i=1}^{n+m} A_i,$$

(3) es gibt disjunkte $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ mit

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

BEWEIS. *(1)* folgt induktiv aus Eigenschaft (S2) in der Definition eines Semirings (Definition 2.1.4 S.41). *(2)* folgt aus Teil *(1)* und der Eigenschaft (DC) eines DC-Semirings. Nach Lemma 1.2.5 auf Seite 32 gibt es relativ kompakte, messbare $R_k \subset E$ mit $\mathbb{R}_k \nearrow E$. Nach *(1)* und *(2)* gibt es dann paarweise disjunkte $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ und $n_k \in \mathbb{N}$, so dass $\bigcup_{i=1}^{n_k} A_i \supset R_k \nearrow E$, also gilt *(3)*. □

In der Einleitung dieses Abschnittes wurde die Betrachtung von DC-Semiringen durch ihre Handlichkeit bzw. „Kleinheit“ gerechtfertigt. Wir lernen nun einen einfach parametrisierbaren DC-Semiring auf dem Raum $\acute{\mathbb{R}}^h$ aus Abschnitt 1.3 kennen. In Kapitel 3 werden wir des Öfteren auf diesen DC-Semiring zurückgreifen.

2.3.9 Beispiel Das Mengensystem

$$\mathcal{C} := \left\{ \prod_{i=1}^{h} (b_i, c_i] \;\middle|\; -\infty \le b_i \le c_i \le \infty \text{ und } \exists i_0 = 1, \dots, h: \; c_{i_0} < 0 \text{ oder } 0 < b_{i_0} \right\}$$

ist ein DC-Semiring auf $\acute{\mathbb{R}}^h$ bezüglich der Topologie $\acute{\mathcal{T}}$.

BEWEIS. Man überzeuge sich zunächst, dass $\mathcal{C}$ wirklich ein Semiring ist. Wir verzichten hier auf diesen recht technischen Beweis einer mit der Intuition übereinstimmenden Tatsache. Mit weiterem technischen Aufwand lässt sich zeigen, dass

$$\mathcal{C}' := \{ \prod_{i=1}^{h} (b_i, c_i) \mid \prod_{i=1}^{h} (b_i, c_i] \in \mathcal{C} \} \subset \acute{\mathcal{T}}$$

eine Basis von $\acute{\mathcal{T}}$ ist. Gemäß Lemma 2.3.6 auf Seite 62 ist $\mathcal{C}$ damit ein DC-System, also auch ein DC-Semiring. □

2.3.10 Satz *Sei E ein lokal kompakter, polnischer Raum und es bezeichne $\mathcal{T}$ die Topologie auf E. Dann gilt für ein beliebiges Radon-Maß μ*

(1) $\mathfrak{R}^\circ_\mu(E) = \mathfrak{R}_\mu(E) \cap \mathcal{T}$ ist ein vereinigungs- und schnittstabiles DC-System,

(2) $\mathfrak{R}_\mu(E)$ ist ein vereinigungsstabiler DC-Semiring.

Beachte, dass $\mathfrak{R}^\circ_\mu(E)$, $\mathfrak{R}_\mu(E)$ und $\mathfrak{R}(E)$ nach Lemma 2.3.7 auf Seite 63 damit insbesondere Erzeugendensysteme von $\mathfrak{B}(E)$ sind.

Beweis. *(1)*: Die Vereinigungs- und Schnittstabilität folgen aus Lemma 1.1.17 auf Seite 14. Um zu zeigen, dass $\mathfrak{R}^\circ_\mu(E)$ ein DC-System ist, reicht es nach Lemma 2.3.6 auf Seite 62 aus, zu beweisen, dass $\mathfrak{R}^\circ_\mu(E)$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_d$ von E enthält.

$\mathfrak{R}^\circ_\mu(E)$ enthält genau dann eine Basis von $\mathcal{T}_d$, wenn es für jeden Punkt $x \in E$ und jede offene Menge $V \subset E$ mit $x \in V$ eine relativ kompakte, offene Menge $U \subset E$ gibt mit $\mu[\partial U] = 0$ und $x \in U \subset V$. E ist lokal kompakt, also gibt es eine kompakte Umgebung $K \subset E$ von x. Da E außerdem metrisch ist, gibt es demnach ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$K_\varepsilon(x) \subset K \cap V.$$

Weiterhin gilt $\mu[K_\varepsilon(x)] \leq \mu[K] < \infty$, denn μ ist ein Radon-Maß. Somit ist

$$\left\{y \in K_\varepsilon(x) \;\middle|\; \mu[\{y\}] > n^{-1}\right\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Menge. Die abzählbar unendliche Vereinigung endlicher Mengen ist abzählbar unendlich, daher ist die Menge der „Massepunkte“

$$\Gamma := \left\{y \in K_\varepsilon(x) \;\middle|\; \mu[\{y\}] > 0\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{y \in K_\varepsilon(x) \;\middle|\; \mu[\{y\}] > n^{-1}\right\}$$

von μ in $K_\varepsilon(x)$ abzählbar. Da $(0,\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ überabzählbar ist, gibt es demnach ein $\delta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \delta < \varepsilon$, so dass

$$\partial K_\delta(x) \underset{\textit{Seite 15}}{\overset{\textit{Lem. 1.1.19}}{\subset}} \left\{y \in X \;\middle|\; d(x,y) = \delta\right\} \subset \Gamma^c.$$

Damit ist $\mu[\partial K_\delta(x)] = \mu[\partial K_\delta(x) \cap \Gamma] = 0$. Aus $\delta \leq \varepsilon$ folgt $K_\delta(x) \subset K$ und somit ist $K_\delta(x)$ relativ kompakt. Weiterhin ist $K_\delta(x)$ offen, da es gerade ein Element aus der von der Metrik d definierten Basis von $\mathcal{T}_d$ ist. Somit hat $K_\delta(x)$ alle gewünschten Eigenschaften.

(2): Da $\mathfrak{R}^\circ_\mu(E) \subset \mathfrak{R}_\mu(E)$ ist, brauchen wir nur noch zu zeigen, dass $\mathfrak{R}_\mu(E)$ ein Semi-Ring ist. Da die leere Menge offen und abgeschlossen ist muss ihr Rand leer sein. Demnach liegt sie in $\mathfrak{R}_\mu(E)$. Weiterhin folgt aus Lemma 1.1.17 auf Seite 14, dass $\mathfrak{R}_\mu(E)$ schnitt-, vereinigungs- und differenzstabil, also ein (Semi-)Ring ist. $\square$

2.4 Vage Konvergenz von Radon-Maßen

Ausgerüstet mit dem Handwerkszeug aus den Abschnitten 2.2 und 2.3 können wir nun eine grundlegende Charakterisierung vager Konvergenz (eine Entsprechung des Portmanteau-Theorems, [Klenke, 2008] S.254) herleiten.

2.4.1 Theorem *Sei E ein lokal kompakter, polnischer Raum und $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \in M_+(E)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$.

(2) Es gibt einen DC-Semiring $\mathcal{J} \subset \mathfrak{R}_\mu(E)$, so dass für alle $J \in \mathcal{J}$ gilt $\mu_n[J] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu[J]$.

(3) Für alle $R \in \mathfrak{R}_\mu(E)$ gilt $\mu_n[R] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu[R]$.

(4) Für alle kompakten Mengen $K \subset E$ gilt $\limsup_{n\to\infty} \mu_n[K] \le \mu[K]$ und für alle offenen und relativ kompakten Mengen $G \subset E$ gilt $\liminf_{n\to\infty} \mu_n[G] \ge \mu[G]$.

Beweis. *(1)* $\Rightarrow$ *(4)*: Sei $K \subset E$ kompakt, so gibt es nach Lemma 2.2.7 *(1)* auf Seite 52 eine punktweise fallende Folge von Abbildungen $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $C_K^+(E)$ und kompakte Mengen $K_m \subset E$ mit

$$\mathbb{I}_K \le f_m \le \mathbb{I}_{K_m} \searrow \mathbb{I}_K.$$

Für festes $m \in \mathbb{N}$ ist dann

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n[K] = \limsup_{n\to\infty} \langle \mathbb{I}_K, \mu_n\rangle \le \limsup_{n\to\infty} \langle f_m, \mu_n\rangle \overset{\mu_n \xrightarrow{v} \mu}{=} \langle f_m, \mu\rangle \le \langle \mathbb{I}_{K_m}, \mu\rangle.$$

Außerdem ist $\mu[K_1 \backslash K] < \infty$ und $K_m \backslash K \searrow \emptyset$, also $\mu[K_m \backslash K] \xrightarrow{m} 0$. Demnach können wir den Satz von der dominierten Konvergenz (Satz 2.1.31 auf Seite 49) anwenden (mit dominierender Funktion $\mathbb{I}_{K_1}$) und erhalten

$$\langle \mathbb{I}_{K_m}, \mu\rangle = \int_E \mathbb{I}_{K_m}\, d\mu \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_E \mathbb{I}_K\, d\mu = \mu[K].$$

Somit ist $\limsup_{n\to\infty} \mu_n[K] \le \mu[K]$ bewiesen. Dass für $G \in E$ $\liminf_{n\to\infty} \mu_n[G] \le \mu[G]$ gilt, zeigt man analog mit Hilfe von Teil *(2)* aus Lemma 2.2.7 und dem Satz von der monotonen Konvergenz (Satz 2.1.30 auf Seite 49).

(4) $\Rightarrow$ *(3)*: Sei $R \in \mathfrak{R}_\mu(E)$, also relativ kompakt und $\mu[\partial R] = 0$. Dann ist das Innere $R^\circ \subset R$ von R offen und der Abschluss $\overline{R} \supset R$ kompakt. Aus $\mu[\partial R] = 0$ folgt $\mu[R^\circ] = \mu[R] = \mu[\overline{R}]$. Also können wir wie folgt ansetzen:

$$\mu[R] = \mu[R^\circ] \overset{(3)}{\le} \liminf_{n\to\infty} \mu_n[R^\circ] \le \liminf_{n\to\infty} \mu_n[R] \le \limsup_{n\to\infty} \mu_n[R] \le \limsup_{n\to\infty} \mu_n[\overline{R}] \overset{(3)}{\le} \mu[\overline{R}] = \mu[R].$$

Da somit $\liminf_{n\to\infty} \mu_n[R] = \limsup_{n\to\infty} \mu_n[R] = \mu[R]$ ist, konvergiert $\mu_n[R]$ für $n \to \infty$ gegen $\mu[R]$.

(3) ⇒ (2): Diese Implikation folgt sofort aus $\mathcal{J} \subset \mathfrak{R}_\mu(E)$.

(2) ⇒ (1): Wir zeigen zunächst, dass die Menge $\{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ relativ kompakt (in $M_+(E)$) ist. Gemäß Satz 2.2.9 auf Seite 54 reicht es, hierzu $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n[R] < \infty$ für alle $R \in \mathfrak{R}(E)$ zeigen.

Sei also $R \in \mathfrak{R}(E)$, dann gibt es endlich viele $J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{J}$ mit $R \subset \bigcup_{i=1}^k J_i$. Nach Voraussetzung gilt $\mu_n[J_i] \xrightarrow{n} \mu[J_i]$ und somit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n[J_i] < \infty$ für alle $i = 1, \ldots, k$. Demnach ist

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n[R] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n\Big[\bigcup_{i=1}^k J_i\Big] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^k \mu_n[J_i] \leq \sum_{i=1}^k \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n[J_i] < \infty$$

und somit ist die relative Kompaktheit von $\{\mu_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gezeigt.

Wir können nun Satz 1.1.50 auf Seite 27 anwenden und erhalten so, dass jede beliebige Teilfolge $\{n'\}$ eine Teilfolge $\{n''\}$ mit $\mu_{n''} \xrightarrow{v} \nu$ für ein $\nu \in M_+(E)$ besitzt (beachte, dass vage Konvergenz laut Satz 2.2.5 auf Seite 51 äquivalent zu Konvergenz bezüglich der vagen Topologie ist). Wir haben bereits *(1) ⇒ (4) ⇒ (3) ⇒ (2)* gezeigt, also wissen wir, dass einerseits

$$\nu[J] = \lim_{n''\to\infty} \mu_{n''}[J] \ \ \textit{für alle} J \in \mathfrak{R}_\mu(E) \supset \mathcal{J}$$

ist. Andererseits ist nach Voraussetzung $\lim_{n''\to\infty} \mu_{n''}[J] = \mu[J]$ für alle $J \in \mathcal{J}$ und demnach

$$\nu[J] = \mu[J] \ \ \textit{für alle } J \in \mathcal{J}.$$

$\mathcal{J}$ ist ein Semiring und ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{B}(E)$ (siehe Lemma 2.3.7 auf Seite 63). Da μ und ν Radon-Maße und als solche σ-endlich sind, erhalten wir mit Satz 2.1.6 auf Seite 41 $\nu \equiv \mu$. Also hat jede Teilfolge $\{n'\}$ von $\{n\}$ eine Teilfolge $\{n''\}$ mit $v\text{-}\lim_{n\to\infty} \mu_{n''} = \mu$ und dieses μ hängt nicht von der Wahl der konkreten Teilfolgen $\{n'\}$ und $\{n''\}$ ab. Gemäß Lemma 1.1.45 auf Seite 26 gilt also

$$\mu_n \xrightarrow{v} \mu.$$

□

2.5 Zufällige Maße

Zufällige Maße sind sind Zufallsvariablen mit Werten in dem Raum der Radon-Maße $M_+(E)$ auf einem lokal kompakten, polnischen Raum E. Daher werden wir uns zunächst mit einer geeigneten σ-Algebra auf $M_+(E)$ vertraut machen:

2.5.1 Definition Es sei E ein lokal kompakter, polnischer Raum. Für eine messbare Abbildung $f : E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ bezeichnen wir mit f^* die Abbildung

$$f^* : M_+(E) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ \mu \longmapsto \langle f, \mu \rangle$$

und versehen $M_+(E)$ mit der kleinsten σ-Algebra $\mathfrak{M}_+(E)$, bezüglich der f^* für alle $f \in C_K^+(E)$ messbar ist. Das heißt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_+(E) &:= \sigma\big(\big\{(f^*)^{-1}(B) \bigm| f \in C_K^+(E),\ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)\big\}\big)\\ &= \sigma\Big(\Big\{\big\{\mu \in M_+(E) \bigm| \langle f, \mu\rangle \in B\big\} \Bigm| f \in C_K^+(E),\ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)\Big\}\Big).\end{aligned}$$

2.5.2 Bezeichnung Wir bezeichnen für eine messbare Menge $F \in \mathfrak{B}(E)$ mit F^* die „Auswertungsabbildung"

$$F^* : M_+(E) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_0^+},\ \mu \longmapsto \mu[F].$$

2.5.3 Satz *Ist E lokal kompakt und polnisch, $\mu \in M_+(E)$ und $F \in \mathfrak{R}_\mu(E)$, so ist die Abbildung F^* bezüglich $\mathcal{T}_v(M_+(E))$ stetig.*

Beweis. Nach Satz 1.1.52 auf Seite 27 und Theorem 2.2.12 auf Seite 58 reicht es aus, die Folgenstetigkeit von F^* zu zeigen. Seien also $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \in C_K^+(E)$, so dass $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Wir müssen zeigen, dass

$$\mu_n[F] \xrightarrow{n\to\infty} \mu[F]$$

gilt. Diese Konvergenz folgt sofort aus Theorem 2.4.1 auf Seite 66. □

2.5.4 Satz *Es sei E ein lokal kompakter, polnischer Raum und $\mathcal{J} \subset \mathfrak{B}(E)$ ein DC-Semiring auf E. Dann sind folgende Mengen identisch:*

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_+(E) &:= \sigma\big(\big\{(f^*)^{-1}(B) \bigm| f \in C_K^+(E),\ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)\big\}\big)\\ \mathcal{M}_1 &:= \sigma\big(\big\{(F^*)^{-1}(B) \bigm| F \in \mathfrak{B}(E),\ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)\big\}\big)\\ \mathcal{M}_2 &:= \sigma\big(\big\{(G^*)^{-1}(B) \bigm| G \in \mathfrak{B}(E) \text{ offen und rel. kp.},\ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)\big\}\big)\\ \mathcal{M}_3 &:= \sigma\big(\big\{(J^*)^{-1}(B) \bigm| J \in \mathcal{J},\ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)\big\}\big)\\ \mathfrak{B}(M_+(E)) &:= \sigma\big(\mathcal{T}_v(M_+(E))\big)\end{aligned}$$

Beweis. Wir werden zuerst $\mathfrak{M}_+(E) \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \mathfrak{M}_+(E)$ und abschließend $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_3$ und $\mathfrak{M}_+(E) = \mathfrak{B}(M_+(E))$ zeigen.

$\mathfrak{M}_+(E) \subset \mathcal{M}_1$: $\mathfrak{M}_+(E)$ wird von den f^* erzeugt, das heißt, $\mathfrak{M}_+(E)$ ist die kleinste σ-Algebra bezüglich derer alle f^* mit $f \in C_K^+(E)$ messbar sind. Es reicht also, zu zeigen, dass f^* für jedes $f \in C_K^+(E)$ $\mathcal{M}_1$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar ist. Für eine stetige Funktion f gibt es nach Lemma 2.1.29 auf Seite 48 eine Folge von einfachen Funktionen $f_n := \sum_{i=1}^n c_{i,n}\mathbb{I}_{F_{i,n}}$ mit $F_{i,n} \in \mathfrak{B}(E)$ und $c_{i,n} \in \mathbb{R}$ (f ist beschränkt) für alle $i = 1, \dots, n$ mit $f_n \nearrow f$. Die f_n^* sind $\mathcal{M}_1$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar, da sie Linearkombinationen aus Indikatorfunktionen sind und diese sind $\mathcal{M}_1$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar. Gemäß dem Satz von der monotonen Konvergenz (Satz 2.1.30 auf Seite 49) gilt

$$f_n \nearrow f \;\Rightarrow\; \forall \mu \in M_+(E): \;\langle f_n, \mu\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle f, \mu\rangle \;\Rightarrow\; f_n^* \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f^* \quad \textit{(punktweise)}.$$

Also ist nach mit Satz 2.1.27 auf Seite 47 auch f^* $\mathcal{M}_1$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar.

$\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$: Wir zeigen, dass jede Abbildung F^* mit $F \in \mathfrak{B}(E)$ $\mathcal{M}_2$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar ist. Hierzu betrachten wir folgende Mengensysteme:

$$\mathcal{F} := \left\{F \in \mathfrak{B}(E) \;\middle|\; F^* \textit{ ist } \mathcal{M}_2\text{-}\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)\textit{-messbar}\right\}$$
$$\mathcal{G} := \left\{G \in \mathfrak{B}(E) \;\middle|\; G \textit{ ist offen und relativ kompakt}\right\}$$

Offenbar ist $\mathcal{G}$ eine schnitt- und vereinigungsstabile Teilmenge von $\mathcal{F}$. Weiterhin gilt $\sigma(\mathcal{F}) = \mathfrak{B}(E)$. Wir zeigen nun, dass $\mathcal{F}$ ein Dynkin-System (siehe Definition 2.1.1, S.2.1.1) ist. Nach Satz 2.1.2 auf Seite 40 ist dann $\mathcal{F} \supset \delta(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G}) = \mathfrak{B}(E)$ und somit F^* für jedes $F \in \mathfrak{B}(E)$ $\mathcal{M}_2$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar.

D1: Gemäß Lemma 1.2.5 auf Seite 32 gibt es eine aufsteigende Folge von Mengen $G_1, G_2, \dots \in \mathcal{G}$ mit $G_n \nearrow E$. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz (Satz 2.1.30) erhalten wir dann $\langle \mathbb{I}_{G_n}, \mu\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle \mathbb{I}_E, \mu\rangle$ für alle $\mu \in M_+(E)$, d.h. ${G_n}^* \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} E^*$. Da die ${G_n}^*$ $\mathcal{M}_2$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar sind, ist auch E^* $\mathcal{M}_2$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar (siehe Satz 2.1.27).

D2: A^*, B^* sind $\mathcal{M}_2$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar, also ist auch $(B\backslash A)^* = (B^* - A^*)$ $\mathcal{M}_2$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar.

D3: Sei $A^{(n)} := \bigcup i = 1^n A_i$. Dann ist ${A^{(n)}}^* = \sum_{i=1}^n {A_i}^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{M}_2$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz (Satz 2.1.30) gilt dann ${A^{(n)}}^* \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A^*$ (siehe oben) und somit ist A^* $\mathcal{M}_2$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar.

$\mathcal{M}_2 \subset \mathfrak{M}_+(E)$: Wir zeigen, dass jede Funktion $\mathbb{I}_G$ mit offenem und kompaktem $G \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$ $\mathfrak{M}_+(E)$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar ist. Laut Lemma 2.2.7 auf Seite 52 gibt es für ein solches G Funktionen $g_1, g_2, \dots \in C_K^+(E)$ mit $g_n \nearrow \mathbb{I}_G$. Analog wie in „$\mathfrak{M}_+(E) \subset \mathcal{M}_1$“ folgt dann aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass $g_n^* \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{I}_G^*$, und da die g_n^* $\mathfrak{M}_+(E)$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar sind, ist auch $\mathbb{I}_G^*$ $\mathfrak{M}_+(E)$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar (vgl. Satz 2.1.27).

$\mathcal{M}_3 \subset \mathcal{M}_1$: Nach Voraussetzung ist $\mathcal{J} \subset \mathfrak{B}(E)$ und damit $\mathcal{M}_3 \subset \mathcal{M}_1$.

$\mathcal{M}_3 \supset \mathcal{M}_1$: Es sei

$$\mathcal{D} := \left\{F \in \mathfrak{B}(E) \;\middle|\; (F^*)^{-1}(B) \in \mathcal{M}_3\right\}$$

die Klasse der Mengen $F \in \mathfrak{B}(E)$, die für die F^* $\mathcal{M}_3$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar ist. $\mathcal{J} \subset \mathcal{D}$ ist ein schnittstabiles Erzeugendensystem von $\mathfrak{B}(E)$ (siehe Lemma 2.3.7 auf Seite 63). Es reicht also laut Satz 2.1.2 auf Seite 40 aus, zu zeigen, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin System ist, um die Messbarkeit aller F^* mit $F \in \mathfrak{B}(E)$ und damit $\mathcal{M}_3 \supset \mathcal{M}_1$ zu beweisen.

D1: Gemäß Lemma 2.3.8 auf Seite 64 gibt es disjunkte $J_1, J_2, \ldots \in \mathcal{J}$ mit $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$. Da für alle $i \in \mathbb{N}$ $\mu[J_i] + \mu[J_{i+1}] = \mu[J_i \cup J_{i+1}]$ ist, gilt für $J^{(n)} := \bigcup_{i=1}^{n} J_i$, dass ${J^{(n)}}^* = \sum_{i=1}^{n} {J_i}^*$ ist. Da alle ${J_i}^*$ $\mathcal{M}_3$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar sind, muss auch ${J^{(n)}}^*$ $\mathcal{M}_3$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar sein. Mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz (Satz 2.1.30 auf Seite 49) erhalten wir

$$ {J^{(n)}}^*(\mu) = \langle \mathbb{I}_{J^{(n)}}, \mu \rangle \underset{mon.\ Konv.}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \langle \mathbb{I}_E, \mu \rangle = E^*(\mu), $$

d.h. ${J^{(n)}}^* \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} E^*$. Laut Satz 2.1.27 ist E^* damit $\mathcal{M}_3$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$-messbar, also ist $E \in \mathcal{D}$.

D2 und D3 zeigt man genau wie im Teil „$\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$“ dieses Beweises.

Also ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System.

$\mathfrak{M}_+(E) \subset \mathfrak{B}(M_+(E))$: Es reicht, zu zeigen, dass $\mathcal{T}_v(M_+(E)) \subset \mathfrak{M}_+(E)$ ist, denn dann folgt $\sigma(\mathcal{T}_v(M_+(E))) \subset \sigma(\mathfrak{M}_+(E)) = \mathfrak{M}_+(E)$. Laut Theorem 2.2.12 auf Seite 58 gibt es h_1, $h_2, \ldots \in C_K^+(E)$, so dass

$$ \mathcal{S} := \Big\{ \big\{ \mu \in M_+(E) \;\big|\; \langle h_i, \mu \rangle \in (r,s) \big\} \;\Big|\; i \in \mathbb{N},\ r,s \in \mathbb{Q},\ 0 \le r < s \Big\} $$

eine (abzählbare) Subbasis von $\mathcal{T}_v(M_+(E))$ ist. Offenbar gilt $\mathcal{S} \subset \mathfrak{M}_+(E)$. Damit ist auch die von $\mathcal{S}$ erzeugte Basis $\mathcal{B} \subset \mathfrak{M}_+(E)$. Ist nun $M \in \mathcal{T}_v(M_+(E))$ beliebig, so gilt

$$ M = \bigcup_{V \in \mathcal{B},\ V \subset M} V. $$

Beachte, dass dies eine abzählbare Vereinigung ist, da $\mathcal{B}$ abzählbar ist. Also ist $M \in \mathfrak{M}_+(E)$.

$\mathfrak{M}_+(E) \supset \mathfrak{B}(M_+(E))$: Wir zeigen zunächst, dass $M := (f^*)^{-1}(V)$ für offene Mengen V in $\mathfrak{B}(M_+(E))$ liegt. Sei also $V \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$ offen (bezüglich der von der euklidischen Metrik induzierten Topologie $\mathcal{T}(d_2)$ auf $\mathbb{R}_0^+$). Dann ist

$$ V = \bigcup_{x<y \in V,\ (x,y) \subset V} (x,y). $$

Da $(f^*)^{-1}((x,y)) \in \mathcal{T}_v(M_+(E))$ ist auch $M \in \mathcal{T}_v(M_+(E))$. Es gilt also

$$ (f^*)^{-1}(\mathcal{T}(d_2)) := \big\{ (f^*)^{-1}(V) \;\big|\; V \in \mathcal{T}(d_2) \big\} \subset \mathcal{T}_v(M_+(E)) $$

und damit

$$ (f^*)^{-1}(\mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)) = (f^*)^{-1}(\sigma(\mathcal{T}(d_2))) \overset{(*)}{\subset} \sigma\big((f^*)^{-1}(\mathcal{T}(d_2))\big) \subset \sigma\big(\mathcal{T}_v(M_+(E))\big) = \mathfrak{B}(M_+(E)) $$

Damit ist gezeigt, dass ein Erzeugendensystem der σ-Algebra $\mathfrak{M}_+(E)$ in $\mathfrak{B}(M_+(E))$ enthalten ist, also gilt auch $\mathfrak{M}_+(E) \subset \mathfrak{B}(M_+(E))$.

$(*)$ gilt, da die Menge $\big\{ A \in B(\mathbb{R}_0^+) \;\big|\; (f^*)^{-1}(A) \in \sigma\big((f^*)^{-1}(\mathcal{T}(d_2))\big) \big\}$ eine σ-Algebra ist, die $\mathcal{T}(d_2)$ als Teilmenge enthält. □

2.5.5 Definition (Zufälliges Maß) Ein **Zufälliges Maß** auf einem polnischen Raum E ist eine messbare Abbildung

$$\xi : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (M_+(E), \mathfrak{M}_+(E)),\ \omega \longmapsto \xi_{(\omega)}$$

von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ in den Raum der Radon-Maße auf E.

2.5.6 Satz *Es seien ξ und ζ Zufällige Maße auf einem lokal kompakten, polnischen Raum E und $\mathcal{J}$ ein DC-Semiring auf E mit $\mathcal{J} \subset \mathfrak{B}(E)$. Dann ist*

$$\big(\xi[J_1], \ldots, \xi[J_k]\big) \stackrel{d}{=} \big(\zeta[J_1], \ldots, \zeta[J_k]\big)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{J}$ genau dann, wenn

$$\xi \stackrel{d}{=} \zeta.$$

Beweis. Wir wissen aus Satz 2.5.4 auf Seite 68, dass $\mathfrak{M}_+(E)$ von

$$\mathcal{A} := \Big\{ \bigcap_{i=1}^{k} ({J_i}^*)^{-1}(B_i) \;\Big|\; k \in \mathbb{N},\ J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{J},\ B_1, \ldots, B_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+) \Big\}$$

erzeugt wird. Dieses Mengensystem ist offenbar schnittstabil. Gemäß dem Eindeutigkeitssatz für Maße (Satz 2.1.3 auf Seite 40) reicht es also aus

$$P_\xi[A] = P_\zeta[A] \ \ \forall A \in \mathcal{A} \iff \big(\xi[J_1], \ldots, \xi[J_k]\big) \stackrel{d}{=} \big(\zeta[J_1], \ldots, \zeta[J_k]\big) \ \ \forall k \in \mathbb{N},\ J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{J}$$

zu zeigen. Es ist $A \in \mathcal{A}$ genau dann, wenn es $k \in \mathbb{N}$, $J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{J}$ und $B_1, \ldots, B_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$ gibt mit $A = \bigcap_{i=1}^k ({J_i}^*)^{-1}(B_i)$. Demnach ist

$$\begin{aligned}
& P_\xi[A] = P_\zeta[A] \ \ \forall A \in \mathcal{A} \\
\Leftrightarrow\ & P\Big[\xi \in \bigcap\nolimits_{i=1}^k ({J_i}^*)^{-1}(B_i)\Big] = P\Big[\zeta \in \bigcap\nolimits_{i=1}^k ({J_i}^*)^{-1}(B_i)\Big] \\
& \hspace{12em} \forall k \in \mathbb{N},\ J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{J},\ B_1, \ldots, B_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+) \\
\Leftrightarrow\ & P\big[\xi[J_1] \in B_1, \ldots, \xi[J_k] \in B_k\big] = P\big[\zeta[J_1] \in B_1, \ldots, \zeta[J_k] \in B_k\big] \\
& \hspace{12em} \forall k \in \mathbb{N},\ J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{J},\ B_1, \ldots, B_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+) \\
\Leftrightarrow\ & \big(\xi[J_1], \ldots, \xi[J_k]\big) \stackrel{d}{=} \big(\zeta[J_1], \ldots, \zeta[J_k]\big) \\
& \hspace{12em} \forall k \in \mathbb{N},\ J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{J},\ B_1, \ldots, B_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+).
\end{aligned}$$

□

Man kann die Messbarkeit einer $M_+(E)$-wertigen Abbildung über Eigenschaften ihrer „Auswertungsabbildung“

$$\omega \longmapsto \xi_{(\omega)}[A]$$

für bestimmte Mengen $A \in \mathfrak{B}(E)$ charakterisieren. Diese Methode ist oft handlicher als die Messbarkeit jedes Mal elementar nachzuweisen:

2.5.7 Lemma *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $F \in \mathfrak{B}(E)$. Weiterhin seien*

$$\begin{aligned} \xi: \quad & (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (M_+(E), \mathfrak{M}_+(E)), & \omega \longmapsto \xi_{(\omega)} \\ \xi[F]: \quad & (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}_0^+, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)), & \omega \longmapsto \xi_{(\omega)}[F]. \end{aligned}$$

(1) Ist ξ ein Zufälliges Maß, so ist $\xi[F]$ für alle $F \in \mathfrak{B}(E)$ messbar und $\xi_{(\omega)}[R] < \infty$ für alle $R \in \mathfrak{R}(E)$ und $\omega \in \Omega$.

(2) Ist für alle offenen $G \in \mathfrak{R}(E)$ die Abbildung $\xi[G]$ messbar und $\xi_{(\omega)}[G] < \infty$ für alle $\omega \in \Omega$, so ist ξ ein Zufälliges Maß.
Beachte, dass die Verteilung von ξ nach Satz 2.5.6 eindeutig durch die gemeinsame Verteilung der $\xi[G_1], \dots, \xi[G_k]$ mit $k \in \mathbb{N}$, $G_1, \dots, G_k \in \mathfrak{R}(E) \cap \{G \in \mathfrak{B}(E) \mid G \text{ offen in } E\}$ festgelegt ist.

Beweis. Zu *(1)*: Da $\xi_{(\omega)}$ ein Radon-Maß ist, gilt $\xi_{(\omega)}[R] < \infty$ für alle relativ kompakten $R \in \mathfrak{B}(R)$. Zur Messbarkeit: Sei $F \in \mathfrak{B}(E)$. ξ und F^* sind nach Voraussetzung beziehungsweise Satz 2.5.4 auf Seite 68 messbar. Also ist $\xi[F] = F^* \circ \xi$ wie behauptet messbar.

Zu *(2)*: Wir zeigen zuerst, dass $\xi_{(\omega)}$ ein Radon-Maß ist: Ist $R \in \mathfrak{R}(E)$, also relativ kompakt und messbar, so kann R durch endlich viele offene $V_1, \dots, V_k \in \mathfrak{R}(E)$ überdeckt werden (vgl. Lemma 1.2.5 auf Seite 32). Nach Voraussetzung ist $\xi_{(\omega)}$ endlich auf diesen Mengen und somit endlich auf ihrer Vereinigung und deren Teilmenge R.

Es bleibt die Messbarkeit zu zeigen, d.h. $\xi^{-1}(M) \in \mathcal{A}$ für alle $M \in \mathfrak{M}_+(E)$. Betrachte hierzu das Mengensystem

$$\mathcal{G} := \{M \in \mathfrak{M}_+(E) \mid \xi^{-1}(M) \in \mathcal{A}\}$$

aller Mengen aus $\mathfrak{M}_+(E)$ mit messbaren Urbildern. Man kann leicht nachweisen, dass $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra ist. Sei $G \in \mathfrak{B}(E)$ offen und relativ kompakt und $M' = (G^*)^{-1}(B) \in \mathfrak{M}_+(E)$ mit $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)$. Dann ist

$$\xi^{-1}(M') = \xi^{-1}\big((G^*)^{-1}(B)\big) = \big(G^* \circ \xi\big)^{-1}(B) = \xi[G]^{-1}(B) \overset{Vor.}{\in} \mathcal{A}.$$

Demnach ist $\{(G^*)^{-1}(B) \mid G \in \mathfrak{B}(E) \text{ offen, rel. kp., } B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)\} \subset \mathcal{G}$ und somit (vgl. Satz 2.5.4 auf Seite 68) $\mathfrak{M}_+(E) \subset \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$. □

2.5.8 Lemma *Seien ξ und ζ Zufällige Maße auf einem lokal kompakten, polnischen Raum E. ξ hat genau dann die gleiche Verteilung wie ζ ($\xi \overset{d}{=} \zeta$), wenn gilt*

$$\big(\langle f_1, \xi\rangle, \dots, \langle f_k, \xi\rangle\big) \overset{d}{=} \big(\langle f_1, \zeta\rangle, \dots, \langle f_k, \zeta\rangle\big) \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N} \textit{ und } f_1, \dots, f_k \in C_K^+(E).$$

Beweis.

$$\mathcal{A} := \Big\{ \bigcap_{i=1}^{k} \{\mu \in M_+(E) \mid \langle f_i, \mu\rangle \in B_i\} \;\Big|\; k \in \mathbb{N},\ f_i \in C_K^+(E),\ B_i \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+)\ \forall i = 1, \ldots, k \Big\}$$

ist sicherlich ein schnittstabiles Erzeugendensystem von $\mathfrak{M}_+(E)$. Ebenso ist für festes $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{B} := \Big\{ B_1 \times \ldots \times B_k \;\Big|\; B_1, \ldots, B_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+) \Big\}$$

ein schnittstabiler Erzeuger von $\mathfrak{B}((\mathbb{R}_0^+)^k)$. Es reicht also gemäß Satz 2.1.3 auf Seite 40 aus, die Gleichheit der Verteilung der Zufallsvariablen auf den Mengensystemen $\mathcal{A}$ beziehungsweise $\mathcal{B}$ nachzuweisen. Um uns die Notation im folgenden zu erleichtern, definieren wir uns die Abbildung

$$f_{(k)}^{**} := (f_1^*, \ldots, f_k^*) : M_+(E) \longrightarrow (\mathbb{R}_0^+)^k,\ \mu(\langle f_1, \mu\rangle, \ldots, \langle f_k, \mu\rangle).$$

Beachte, dass mit dieser Notation für $B_1, \ldots, B_k \in \mathfrak{B}((\mathbb{R}_0^+)^k$

$$(f_{(k)}^{**})^{-1}(B_1 \times \ldots \times B_k) = \bigcap_{i=1}^{k} \{\mu \in M_+(E) \mid \langle f_i, \mu\rangle \in B_i\}$$

ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&P_\xi = P_\zeta \\
\Leftrightarrow &P[\xi \in A] = P[\zeta \in A] \ \ \textit{für alle } A \in \mathcal{A} \\
\Leftrightarrow &P\Big[\xi \in \bigcap_{i=1}^{k} \{\mu \in M_+(E) \mid \langle f_i, \mu\rangle \in B_i\}\Big] = P\Big[\zeta \in \bigcap_{i=1}^{k} \{\mu \in M_+(E) \mid \langle f_i, \mu\rangle \in B_i\}\Big] \\
&\forall k \in \mathbb{N},\ f_1 \ldots, f_k \in C_K^+(E) \ \textit{und}\ B_1, \ldots, B_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+) \\
\Leftrightarrow &P\big[\xi \in (f_{(k)}^{**})^{-1}(B_1 \times \ldots \times B_k)\big] = P\big[\zeta \in (f_{(k)}^{**})^{-1}(B_1 \times \ldots \times B_k)\big]\ \forall \ldots \\
\Leftrightarrow &P\big[f_{(k)}^{**}(\xi) \in B_1 \times \ldots \times B_k\big] = P\big[f_{(k)}^{**}(\zeta) \in B_1 \times \ldots \times B_k\big]\ \forall \ldots \\
\Leftrightarrow &P\big[(\langle f_1, \xi\rangle, \ldots, \langle f_k, \xi\rangle) \in B_1 \times \ldots \times B_k\big] = P\big[(\langle f_1, \zeta\rangle, \ldots, \langle f_k, \zeta\rangle) \in B_1 \times \ldots \times B_k\big] \\
&\forall k \in \mathbb{N},\ f_1 \ldots, f_k \in C_K^+(E) \ \textit{und}\ B_1, \ldots, B_k \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+) \\
\Leftrightarrow &P\big[(\langle f_1, \xi\rangle, \ldots, \langle f_k, \xi\rangle) \in B\big] = P\big[(\langle f_1, \zeta\rangle, \ldots, \langle f_k, \zeta\rangle) \in B\big] \\
&\forall k \in \mathbb{N},\ f_1, \ldots, f_k C_K^+(E) \ \textit{und}\ B \in \mathcal{B} \\
\Leftrightarrow &P_{(\langle f_1, \xi\rangle, \ldots, \langle f_k, \xi\rangle)} = P_{(\langle f_1, \zeta\rangle, \ldots, \langle f_k, \zeta\rangle)} \ \ \textit{für alle } k \in \mathbb{N} \ \textit{und}\ f_1, \ldots, f_k \in C_K^+(E)
\end{aligned}$$

□

2.6 Laplace-Transformierte Zufälliger Maße

Eine Laplace-Transformierte ist eine spezielle Abbildung, die bestimmten Zufallsvariablen bis auf Verteilung eindeutig zugeordnet werden kann. Auf diese Weise hilft sie beim Nachweis der Gleichheit der Verteilung zweier Zufallsvariablen (Satz 2.6.4 auf der nächsten Seite und Satz 2.6.12 auf Seite 78). Weiterhin gibt es (wie z.B. auch bei der Charakteristischen Funktion) Stetigkeitssätze, die besagen, dass schwache Konvergenz der Zufallsvariablen äquivalent zur punktweisen Konvergenz der zugehörigen Laplace-Transformierten ist (Satz 2.6.5 auf der nächsten Seite und Theorem 2.6.13 auf Seite 79). Wir werden einleitend derartige Sätze für Laplace-Transformierte $(\mathbb{R}_0^+)^h$-wertiger Zufallsvariablen vorstellen. Auf diesen Sätzen aufbauend, werden wir dann entsprechende Eindeutigkeits- und Stetigkeitssätze für Zufällige Maße beweisen.

2.6.1 Definition Es sei $h \in \mathbb{N}$. Die **Laplace-Transformierte** einer Zufallsvariablen

$$X = (X_1, \ldots, X_h) : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow ((\mathbb{R}_0^+)^d, \mathfrak{B}((\mathbb{R}_0^+)^h))$$

ist die Abbildung $\mathcal{L}_X : (\mathbb{R}_0^+)^h \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(t_1, \ldots, t_d) &:= \int_{(\mathbb{R}_0^+)^d} \exp\Big(-\sum_{i=1}^h t_i x_i\Big)\, dP \circ X^{-1}(x) \\
&= \int_\Omega \exp\Big(-\sum_{i=1}^h t_i X_i(\omega)\Big)\, dP(\omega) \\
&= \mathbb{E}\Big(\exp\Big(-\sum_{i=1}^h t_i X_i\Big)\Big).
\end{aligned}$$

2.6.2 Beispiel Sei $\vartheta \geq 0$ und $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ *Poisson*(ϑ)-verteilt, d.h.

$$P[X = k] = \exp(-\vartheta) \cdot \frac{\vartheta^k}{k!} \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N},$$

dann ist für $t \in \mathbb{R}_0^+$

$$\mathcal{L}_X(t) = \exp\big(-\vartheta(1 - \exp(-t))\big).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(t) = \mathbb{E}\big(\exp(-tX)\big) &= \sum_{k=0}^\infty \exp(-tk)\exp(-\vartheta) \cdot \frac{\vartheta^k}{k!} = \exp(-\vartheta) \sum_{k=0}^\infty \frac{\big(\exp(-t)\vartheta\big)^k}{k!} \\
&= \exp(-\vartheta) \cdot \exp\big(\exp(-t)\vartheta\big) = \exp\big(-\vartheta(1 - \exp(-t))\big)
\end{aligned}$$

□

2.6.3 Lemma *Sind $X_1, \dots, X_h$ unabhängige Zufallsvariablen auf $(\mathbb{R}_0^+, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0^+))$ so gilt*

$$\mathcal{L}_{(X_1,\dots,X_h)}(t_1, \dots, t_h) = \prod_{i=1}^{h} \mathcal{L}_{X_i}(t_i) \quad \textit{für alle } t_1, \dots, t_h \in \mathbb{R}_0^+.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(X_1,\dots,X_h)}(t_1, \dots, t_h) &:= \mathbb{E}\Big(\exp\Big(-\sum_{i=1}^{h} t_i X_i\Big)\Big) = \mathbb{E}\Big(\prod_{i=1}^{h} \exp(-t_i X_i)\Big) \\ &\overset{\textit{unabh.}}{=} \prod_{i=1}^{h} \mathbb{E}\big(\exp(-t_i X_i)\big) = \prod_{i=1}^{h} \mathcal{L}_{X_i}(t_i).\end{aligned}$$

□

2.6.4 Satz *Sind X und Y Zufallsvariablen auf $((\mathbb{R}_0^+)^h, \mathfrak{B}((\mathbb{R}_0^+)^h))$ und gilt $\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_Y$, so folgt, dass $X \overset{d}{=} Y$ ist.*

Beweis. Siehe „Theorem 1“ auf S. 430 in [Feller, 1971] für den Fall $h = 1$. Aus dem Cramér-Wold Device (Satz 2.1.24 auf Seite 46) lässt sich folgern:

$$(X^{(1)}, \dots, X^{(h)}) \overset{d}{=} (Y^{(1)}, \dots, Y^{(h)}) \iff \sum_{i=1}^{h} t_i X^{(i)} \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{h} t_i Y^{(i)} \quad \textit{für alle } t_1, \dots t_h \in \mathbb{R}_0^+.$$

Mit Hilfe dieser Äquivalenz folgt nun die Behauptung für $h \geq 2$. □

2.6.5 Satz *Für Zufallsvariablen $X, X_1, X_2, \dots$ auf $((\mathbb{R}_0^+)^h, \mathfrak{B}((\mathbb{R}_0^+)^h))$ gilt:*

$$X_n \xrightarrow{d} X \iff \mathcal{L}_{X_n}(t_1, \dots, t_h) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}_X(t_1, \dots, t_h) \textit{ für alle } t_1, \dots, t_h \in \mathbb{R}_0^+.$$

Beweis. Siehe „Theorem 2“ auf S. 431 in [Feller, 1971] für den eindimensionalen Fall. Laut Satz 2.1.24 auf Seite 46 gilt, dass

$$(X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(h)}) \xrightarrow{d} (X^{(1)}, \dots, X^{(h)}) \iff \sum_{i=1}^{h} t_i X_n^{(i)} \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{h} t_i X^{(i)} \quad \textit{für alle } t_1, \dots t_h \in \mathbb{R}_0^+.$$

Mithilfe dieser Äquivalenz lässt sich der mehrdimensionale Fall sofort aus dem eindimensionalen folgern. □

Wir sammeln nun kurz die weiteren, für den analogen Stetigkeitssatz für Zufällige Maße relevanten Begriffe und Aussagen.

2.6.6 Definition (Straffheit) Eine Familie M von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einem messbaren Raum $(E, \mathfrak{B}(E))$ heißt **straff**, falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset E$ existiert mit:

$$\mu[K] \geq 1 - \varepsilon \quad \forall \mu \in M$$

Eine Familie $\mathcal{X}$ von Zufallsvariablen mit Werten in E heißt **straff auf** E, falls die zugehörige Familie von Verteilungsfunktionen $\{P_X \mid X \in \mathcal{X}\}$ auf E **straff auf** E ist.

2.6.7 Bemerkung Ist E' ein polnischer Raum und $\mathcal{T}_w(M_+(E'))$ die gröbste Topologie auf $M_+(E')$, so dass die Abbildung

$$f^* : M_+(E') \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ \mu \longmapsto \langle f, \mu \rangle$$

für alle $f \in C_b(E')$ stetig ist, so stimmt die schwache Konvergenz in $M_+(E')$ mit der (topologischen) Konvergenz bezüglich $\mathcal{T}_w(M_+(E'))$ überein. Man nennt $\mathcal{T}_w(M_+(E'))$ deshalb die schwache Topologie auf $M_+(E)$. Es kann sogar gezeigt werden, dass es eine passende Metrik d_P zur schwachen Topologie, die sogenannte Prohorov-Metrik, gibt (siehe [Klenke, 2008] S.252 oder [Billingsley, 1968]).
Wir haben in Abschnitt 2.2 gesehen, dass $M_+(E)$ polnisch ist. Ist nun $E' = M_+(E)$ für einen lokal kompakten, polnischen Raum E, und $\mathcal{T}_w(M_+(M_+(E)))$ die schwache Topologie auf $M_+(M_+(E))$, so gilt für $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots \in \mathfrak{L}(M_+(E))$

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \ :\Longleftrightarrow \quad P_{\xi_n} \xrightarrow{w} P_\xi \quad \Longleftrightarrow \quad P_{\xi_n} \xrightarrow{top.} P_\xi \ \textit{ bezüglich } \mathcal{T}_w(M_+(E')).$$

Aus diesem Grund können wir uns topologische Aussagen, etwa über die Konvergenz von Folgen (insb. Lemma 1.1.45 auf Seite 26) oder den Satz von Prohorov (Satz 2.6.9), zunutze machen, um Aussagen über Konvergenz in Verteilung von Zufälligen Maßen zu zeigen.

2.6.8 Definition (schwache Folgenkompaktheit) Sei E ein metrisierbarer Raum.

(1) Eine Familie $K \subset M_{\leq 1}(E)$ von Sub-Wahrscheinlichkeitsmaßen auf E heißt **schwach folgenkompakt** auf E, falls es für jede Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K eine Teilfolge $\{n'\}$ von $\{n\}$ gibt mit $w\text{-}\lim \mu_{n'} = \mu_0$ für irgendein $\mu_0 \in K$.

(2) Eine Teilmenge $R \subset M_{\leq 1}(E)$ heißt **schwach relativ folgenkompakt** auf E, falls es für jede Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K eine Teilfolge $\{n'\}$ von $\{n\}$ gibt mit $w\text{-}\lim \mu_{n'} = \mu_0$ für irgendein $\mu_0 \in M_+(E)_{\leq 1}$.

(3) Eine Familie $\mathcal{X} \subset \mathfrak{L}(E)$ von Zufallsvariablen auf E heißt **schwach (relativ) folgenkompakt** auf E, wenn die zugehörige Familie von Verteilungen $\{P_X | X \in \mathcal{X}\}$ **schwach (relativ) folgenkompakt** ist.

2.6.9 Satz ***(Satz von Prohorov)*** *Sei E ein polnischer Raum und $M \subset M_{\leq 1}(E)$, dann gilt:*

$$M \text{ ist straff} \iff M \text{ ist schwach relativ folgenkompakt} \quad .$$

(Siehe [Klenke, 2008] S.261.)

2.6.10 Lemma *Für einen lokal kompakten, polnischen Raum E ist eine Familie*

$$\left\{\xi_n \in \mathfrak{L}(M_+(E)) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$$

von Zufälligen Maßen genau dann straff (auf $M_+(E)$), wenn für jede Funktion $f \in C_K^+(E)$

$$\left\{\langle f, \xi_n\rangle \in \mathfrak{L}(E) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$$

straff (auf $\mathbb{R}_0^+$) ist.

Beweis. „$\Rightarrow$": Sei $\left\{\xi_n \in \mathfrak{L}(M_+(E)) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ straff. Dann gibt es eine kompakte Menge $M \in M_+(E)$ mit

$$P(\xi_n[M]) \geq 1 - \varepsilon \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da M kompakt ist, ist für jedes $f \in C_K^+(E)$ nun gemäß Satz 2.2.9 auf Seite 54 $\sup_{\mu \in M} \langle f, \mu\rangle < \infty$.

$$\langle f, M\rangle := \left\{\langle f, \mu\rangle \;\middle|\; \mu \in M\right\}$$

ist also kompakt in $\mathbb{R}_0^+$. Es gilt:

$$P\big[\langle f, \xi_n\rangle \in \langle f, M\rangle\big] \geq P\big[\xi_n \in M\big] \geq 1 - \varepsilon,$$

also ist $\left\{\langle f, \xi_n\rangle \in \mathfrak{L}(E) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ straff auf $\mathbb{R}_0^+$.

„$\Leftarrow$": Für jedes fest gewählte $f \in C_K^+(E)$ ist $\left\{\langle f, \xi_n\rangle \in \mathfrak{L}(E) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ straff auf $\mathbb{R}_0^+$. Nach *(2)* in Lemma 2.2.7 auf Seite 52 gibt es eine Funktionenfolge $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $C_K^+(E)$ mit $g_i \nearrow \mathbb{I}_E$ (punktweise). Da $\left\{\langle g_i, \xi_n\rangle \in \mathfrak{L}(E) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ straff ist, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ und $i \in \mathbb{N}$ eine kompakte Menge $K_i \subset \mathbb{R}_0^+$ mit $P_{\langle g_i, \xi_n\rangle}[K_i] > 1 - \frac{\varepsilon}{2^i}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere gibt es also ein k_i in $\mathbb{R}^+$ mit $P\big[\langle g_i, \xi\rangle \leq k_i\big] > 1 - \frac{\varepsilon}{2^i}$ und somit

$$P\big[\langle g_i, \xi_n\rangle > k_i\big] < \frac{\varepsilon}{2^i} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Betrachte die Menge

$$M := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \left\{\mu \in M_+(E) \;\middle|\; \langle g_i, \mu\rangle \leq k_i\right\}.$$

Ist $f \in C_K^+(E)$, so gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}$ und eine Konstante l, so dass $f(x) \leq l g_{i_0}(x)$ für alle $x \in E$. Somit gilt:

$$\sup_{\mu \in M} \langle f, \mu\rangle \leq \sup_{\mu \in M} l\langle g_{i_0}, \mu\rangle \leq l k_{i_0} < \infty.$$

Nach Satz 2.2.9 auf Seite 54 ist dies hinreichend für die relative Kompaktheit von M. Demnach ist $\overline{M}$ eine kompakte Menge in $M_+(E)$ mit

$$\begin{aligned} P\big[\xi_n \in \overline{M}^c\big] \le P\big[\xi_n \in M^c\big] &= P\Big[\xi_n \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big\{\mu \in M_+(E) \mid \langle g_i, \mu\rangle > k_i\big\}\Big] \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} P\big[\langle g_i, \xi_n\rangle > k_i\big] \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon \ \ \textit{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

und somit

$$P\left[\xi_n \in \overline{M}\right] \ge 1 - \varepsilon \ \ \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also ist $\big\{\xi_n \in \mathfrak{L}(M_+(E)) \;\big|\; n \in \mathbb{N}\big\}$ straff auf $M_+(E)$. □

Nun kommen wir zu der für uns relevanten Laplace-Transformierten:

2.6.11 Definition (Laplace-Transformierte Zufälliger Maße) Die **Laplace-Transformierte** eines Zufälligen Maßes $\xi : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (M_+(E), \mathfrak{M}_+(E))$ ist die Abbildung $\mathcal{L}_\xi : C_K^+(E) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi(f) &:= \int_{M_+(E)} \exp\big(-\int_E f(x)\, d\mu(x)\big)\, dP \circ \xi^{-1}(\mu) \\ &= \int_\Omega \exp\big(-\int_E f(x)\, d\xi_{(\omega)}(x)\big)\, dP(\omega) \\ &= \int_\Omega \exp\big(-\langle f, \xi_{(\omega)}\rangle\big)\, dP(\omega) \\ &= \mathbb{E}\big(\exp(-\langle f, \xi\rangle)\big). \end{aligned}$$

2.6.12 Satz ***(Eindeutigkeitssatz für Laplace-Transformierte)*** *Die Verteilung eines Zufälligen Maßes ist durch seine Laplace-Transformierte eindeutig bestimmt, das heißt: Sind ξ und ζ Zufällige Maße auf E, so gilt*

$$\mathcal{L}_\xi = \mathcal{L}_\zeta \quad \Longleftrightarrow \quad \xi \overset{d}{=} \zeta.$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Wir zeigen äquivalent $\big(\langle f_1, \xi\rangle, \dots, \langle f_k, \xi\rangle\big) \overset{d}{=} \big(\langle f_1, \zeta\rangle, \dots, \langle f_k, \zeta\rangle\big)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $f_1, \dots, f_k \in C_K^+(E)$ (siehe Lemma 2.5.8 auf Seite 72). Sei also $k \in \mathbb{N}$ und $f_1, \dots, f_k \in C_K^+(E)$. Betrachten wir die zugehörigen Laplace-Transformierten dieser Zufallsvektoren: Sei

$t = (t_1, \ldots, t_k) \in (\mathbb{R}_0^+)^k$, dann ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(\langle f_1,\xi\rangle,\ldots,\langle f_k,\xi\rangle)}(t) &= \mathbb{E}\Big(\exp\Big(-\sum_{i=1}^{k} t_i\langle f_i,\xi\rangle\Big)\Big) = \mathbb{E}\Big(\exp\Big(-\Big\langle\underbrace{\sum_{i=1}^{k} t_i f_i}_{\in C_K^+(E)},\xi\Big\rangle\Big)\Big)\\
&\overset{Vor.}{=} \mathbb{E}\Big(\exp\Big(-\Big\langle\sum_{i=1}^{k} t_i f_i,\zeta\Big\rangle\Big)\Big) = \mathbb{E}\Big(\exp\Big(-\sum_{i=1}^{k} t_i\langle f_i,\zeta\rangle\Big)\Big)\\
&= \mathcal{L}_{(\langle f_1,\zeta\rangle,\ldots,\langle f_k,\zeta\rangle)}(t).
\end{aligned}$$

Laut Satz 2.6.4 auf Seite 75 ist dies hinreichend für

$$\big(\langle f_1,\xi\rangle,\ldots,\langle f_k,\xi\rangle\big) \overset{d}{=} \big(\langle f_1,\zeta\rangle,\ldots,\langle f_k,\zeta\rangle\big).$$

„$\Leftarrow$“: Folgt sofort aus der Definition der Laplace-Transformierten Zufälliger Maße. □

2.6.13 Theorem ***(Stetigkeitssatz für Laplace-Transformierte)*** *Sind $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ Zufällige Maße auf E, so gilt:*

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff \mathcal{L}_{\xi_n}(f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}_\xi(f) \text{ für alle } f \in C_K^+(E).$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. Für ein $f \in C_K^+(E)$ wenden wir den Satz von der stetigen Abbildung (Satz 2.1.26 auf Seite 47) auf die stetige Abbildung

$$f^* : M_+(E) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ \mu \longmapsto \langle f,\mu\rangle$$

an (Stetigkeit: siehe 2.2.3 auf Seite 50). Wir erhalten somit für jedes $f \in C_K^+(E)$ die Konvergenz in Verteilung

$$\langle f,\xi_n\rangle \xrightarrow{d} \langle f,\xi\rangle$$

in $\mathfrak{L}(\mathbb{R}_0^+)$. Mit Hilfe von Satz 2.6.5 auf Seite 75 gilt nun

$$\mathcal{L}_{\xi_n}(f) = \mathbb{E}\Big(exp\big(-\langle f,\xi_n\rangle\big)\Big) = \mathcal{L}_{\langle f,\xi_n\rangle}(1) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}_{\langle f,\xi\rangle}(1) = \mathbb{E}\Big(exp\big(-t\langle f,\xi_n\rangle\big)\Big) = \mathcal{L}_\xi(f).$$

„$\Leftarrow$“: Sei $f \in C_K^+(E)$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$. $\langle f,\xi_n\rangle$ und $\langle f,\xi\rangle$ sind dann nichtnegative Zufallsvariablen. Wir betrachten die punktweise Konvergenz der zugehörigen Laplace-Transformierten:

$$\mathcal{L}_{\langle f,\xi_n\rangle}(t) = \mathbb{E}\Big(exp\big(-t\langle f,\xi_{n\bullet}\rangle\big)\Big) = \mathcal{L}_{\xi_n}(tf) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}_\xi(tf) = \mathbb{E}\Big(exp\big(-t\langle f,\xi_\bullet\rangle\big)\Big) = \mathcal{L}_{\langle f,\xi\rangle}(t).$$

Nach Satz 2.6.5 auf Seite 75 gilt somit $\langle f,\xi_n\rangle \xrightarrow{d} \langle f,\xi\rangle$ in $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^+)$. Also ist $\{\langle f,\xi_n\rangle | n \in \mathbb{N}\}$ schwach relativ folgenkompakt. Der Satz von Prohorov (Satz 2.6.9, 77) besagt, dass $\{\langle f,\xi_n\rangle | n \in \mathbb{N}\}$

dann auch straff auf $\mathbb{R}_0^+$ ist. Gemäß Lemma 2.6.10 auf Seite 77 ist $\{\xi_n | n \in \mathbb{N}\}$ demnach ebenfalls straff und somit (wieder nach dem Satz von Prohorov) auch schwach relativ folgenkompakt.
Ist nun $\{n'\}$ eine Teilfolge von $\{n\}$, so gibt es eine Teilfolge $\{n''\}$ von $\{n'\}$ mit

$$\xi_{n''} \xrightarrow{d} \zeta$$

für irgendein Zufälliges Maß $\zeta \in \mathfrak{L}(M_+(E))$ (vgl. Definition 2.6.8). Aus dem „$\Leftarrow$"-Teil des Beweises folgern wir $\mathcal{L}_{\xi_{n''}}(f) \longrightarrow \mathcal{L}_\zeta(f)$ für alle $f \in C_K(E)$. Nach Voraussetzung gilt aber $\mathcal{L}_{\xi_n}(f) \longrightarrow \mathcal{L}_\xi(f)$ für alle $f \in C_K(E)$, demnach ist $\mathcal{L}_\xi(f) = \mathcal{L}_\zeta(f)$ für alle $f \in C_K^+(E)$. Aus Satz 2.6.12 auf Seite 78 folgt dann $\zeta \overset{d}{=} \xi$. Also hat jede Teilfolge von $\{n'\}$ von $\{n\}$ eine Teilfolge $\{n''\} \subset \{n'\}$ mit $d\text{-}\lim \xi'_n = \xi$ und somit gilt

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$$

(vgl. Lemma 1.1.45 auf Seite 26). □

2.6.14 Korollar *Für einen lokal kompakten, polnischen Raum E und Zufällige Maße ζ, ξ, ξ_1, $\xi_2 \ldots \in \mathfrak{L}(M_+(E))$ gilt:*

$$\xi \overset{d}{=} \zeta \iff \langle f, \xi \rangle \overset{d}{=} \langle f, \zeta \rangle \quad \forall f \in C_K^+(E),$$
$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \iff \langle f, \xi_n \rangle \xrightarrow{d} \langle f, \xi \rangle \quad \forall f \in C_K^+(E).$$

Beweis. Im Beweis von Satz 2.6.13 wurde gezeigt, dass für $t \in \mathbb{R}_0^+$ $\mathcal{L}_\xi(tf) = \mathcal{L}_{\langle f, \xi \rangle}(t)$ ist. Also gelten für $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $f \in C_K^+(E)$

$$\mathcal{L}_\xi(tf) = \mathcal{L}_\zeta(tf) \iff \mathcal{L}_{\langle f, \xi \rangle}(t) = \mathcal{L}_{\langle f, \zeta \rangle}(t)$$

(vgl. Satz 2.6.12 auf Seite 78) und

$$\mathcal{L}_{\xi_n}(tf) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}_\xi(tf) \iff \mathcal{L}_{\langle f, \xi_n \rangle}(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{L}_{\langle f, \xi \rangle}(t)$$

(vgl. Theorem 2.6.13 auf der vorherigen Seite). □

2.7 Konvergenz in Verteilung von Zufälligen Maßen

2.7.1 Bezeichnung Es sei ξ ein Zufälliges Maß auf einem lokal kompaktem, polnischen Raum E. Dann bezeichnen wir mir $\mathfrak{R}_\xi(E)$ das Mengensystem

$$\mathfrak{R}_\xi(E) := \big\{E \in \mathfrak{B}(E) \bigm| E \in \mathfrak{R}(E),\ \xi[\partial E] = 0 \textit{ fast sicher}\big\}.$$

2.7.2 Lemma *$\mathfrak{R}_\xi(E)$ ist für ein beliebiges Zufälliges Maß ξ auf einem lokal kompakten, polnischen Raum E ein vereinigungs- und differenzstabiler DC-Semiring.*

Beweis. Die Vereinigungs- und Schnittstabilität folgen aus Lemma 1.1.17 auf Seite 14. Dem selben Lemma entnehmen wir auch die Differenzstabilität von $\mathfrak{R}_\xi(E)$. Um zu zeigen, dass $\mathfrak{R}_\xi(E)$ ein DC-System ist, reicht es nach Lemma 2.3.6 auf Seite 62 aus, zu beweisen, dass $\mathfrak{R}_\xi(E)$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$ von E enthält.

$\mathfrak{R}_\xi(E)$ enthält genau dann eine Basis von $\mathcal{T}$, wenn es für jeden Punkt $x \in E$ und jede offene Menge $V \subset E$ mit $x \in V$ eine relativ kompakte, offene Menge $U \subset E$ gibt mit $P[\xi[\partial U] = 0] = 1$ und $x \in U \subset V$. E ist lokal kompakt, also gibt es eine kompakte Umgebung $K \subset E$ von x. Da E außerdem metrisch ist, gibt es demnach ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$K_\varepsilon(x) \subset K \cap V.$$

Weiterhin gilt $P\big[\xi[K_\varepsilon(x)] < \infty\big] \geq P\big[\xi[K] < \infty\big] = 1$, denn ξ ist fast sicher ein Radon-Maß. Somit ist

$$\Big\{y \in K_\varepsilon(x) \ \Bigm|\ P\big[\xi[\{y\}] > n^{-1}\big] > m^{-1}\Big\}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ eine endliche Menge. Die abzählbar unendliche Vereinigung endlicher Mengen ist abzählbar unendlich, daher ist die Menge der „Massepunkte“

$$\Gamma := \bigcup_{n,m=1}^{\infty} \Big\{y \in K_\varepsilon(x) \Bigm| P\big[\xi[\{y\}] > n^{-1}\big] > m^{-1}\Big\}$$

von ξ in $K_\varepsilon(x)$ abzählbar und es gilt

$$\Gamma = \Big\{y \in K_\varepsilon(x) \Bigm| P\big[\xi[\{y\}] > 0\big] > 0\Big\}.$$

Da $(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ überabzählbar ist, gibt es also ein $\delta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \delta < \varepsilon$, so dass

$$\partial K_\delta(x) \overset{\textit{Lem. 1.1.19}}{\subset} \big\{y \in X \bigm| d(x,y) = \delta\big\} \subset \Gamma^c.$$

Damit ist

$$P\big[\xi[\partial K_\delta(x)] = 0\big] = 1 - P\big[\xi[\partial K_\delta(x)] \neq 0\big] = 1 - P\big[\xi[\partial K_\delta(x) \cap \Gamma] \neq 0\big] = 1.$$

Aus $\delta \leq \varepsilon$ folgt $K_\delta(x) \subset K$ und somit ist $K_\delta(x)$ relativ kompakt. Weiterhin ist $K_\delta(x)$ offen, da es gerade ein Element aus der von der Metrik d definierten Basis von $\mathcal{T}$ ist. Somit hat $K_\delta(x)$ alle gewünschten Eigenschaften. □

Fassen wir noch einmal die Eindeutigkeitsaussagen aus Satz 2.5.6 auf Seite 71 und Korollar 2.6.14 auf Seite 80 zusammen:

2.7.3 Satz *Es seien ξ und ζ Zufällige Maße auf einem lokal kompakten, polnischen Raum E und $\mathcal{J}$ ein DC-Semiring auf E mit $\mathcal{J} \subset \mathfrak{B}(E)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\xi \overset{d}{=} \zeta$,

(2) $\langle f, \xi \rangle = \langle f, \zeta \rangle \quad \forall f \in C_K^+(E)$,

(3) $\big(\xi[J_1], \dots, \xi[J_k]\big) \overset{d}{=} \big(\zeta[J_1], \dots, \zeta[J_k]\big)$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *und* $J_1, \dots, J_k \in \mathcal{J}$.

Wir entwerfen nun entsprechende Konvergenzaussagen:

2.7.4 Theorem *Es sei E ein lokal kompakter, polnischer Raum und $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ zufällige Maße auf $(E, \mathfrak{B}(E))$, sowie $\mathcal{J} \subset \mathfrak{R}_\xi(E)$ ein DC-Semiring auf E bezüglich $\mathfrak{B}(E)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$,

(2) $\langle f, \xi_n \rangle \xrightarrow{d} \langle f, \xi \rangle$ *für alle* $f \in C_K^+(E)$,

(3) $\big(\xi_n[J_1], \dots, \xi_n[J_k]\big) \xrightarrow{d} \big(\xi[J_1], \dots, \xi[J_k]\big)$ *für alle* $k \in \mathbb{N},\ J_1, \dots, J_k \in \mathcal{J}$.

Nach Lemma 2.7.2 auf der vorherigen Seite ist die Aussage insbesondere für $\mathcal{J} = \mathfrak{R}_\xi(E)$ gültig.

Beachte, dass die $\xi_i[J_j]$ und $\xi[J_j]$ reelle Zufallsvariablen sind. Die Kenntnis des schwachen Konvergenzverhaltens Zufälliger Maße auf einem Raum E gibt also Auskunft über das schwache Konvergenzverhalten reeller Zufallsvariablen, die durch Mengen aus dem DC-Semiring $\mathfrak{R}_\mu(E)$ gemäß Lemma 2.5.7 auf Seite 72 induziert werden. Diese – zunächst vielleicht trivial erscheinende – Implikation ist unverzichtbar für den Beweis des Satzes von Mikosch und Račkauskas (in der Form von [Mikosch & Račkauskas]; vlg. auch S. 61).

Beweis. *(1)* $\Leftrightarrow$ *(2)*: Diese Äquivalenz wurde bereits in Korollar 2.6.14 auf Seite 80 bewiesen.

(1) $\Rightarrow$ *(3)*: Nach Satz 2.5.3 auf Seite 68 ist die Abbildung

$$({J_1}^*, \dots, {J_k}^*) : M_+(E) \longrightarrow (\mathbb{R}_0^+)^k,\ \mu \longmapsto (\mu[J_1], \dots, \mu[J_k])$$

für alle $k \in \mathbb{N},\ J_1, \dots, J_k \in \mathcal{J}$ (komponentenweise) stetig. Mit dem Satz von der stetigen Abbildung (Satz 2.1.26 auf Seite 47) erhalten wir die gewünschte Konvergenz in Verteilung.

(1) ⇐ (3): Wir zeigen zunächst, dass $\{\xi_n | n \in \mathbb{N}\}$ straff ist. Hierzu reicht es nach Lemma 2.6.10 auf Seite 77 zu zeigen, dass $\big\{\langle f, \xi_n\rangle \bigm| n \in \mathbb{N}\big\}$ für alle $f \in C_K^+(E)$ straff ist. Sei also $f \in C_K^+(E)$ mit Träger S_f und $\|f\|_\infty := \sup\{f(x) | x \in E\} < \infty$, dann ist

$$\langle f, \xi_n\rangle \leq \|f\|_\infty \langle \mathbb{I}_{S_f}, \xi_n\rangle = \|f\|_\infty \xi_n[S_f]$$

Da $\mathcal{J} \subset \mathfrak{R}(E)$ ein DC-Semiring und S_f kompakt ist, gibt es relativ kompakte $J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{J}$, so dass

$$S_f \subset \bigcup_{i=1}^k J_i.$$

Es gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \langle f, \xi_n\rangle \leq \|f\|_\infty \sup_{n\in\mathbb{N}} \xi_n[S_f] \leq \|f\|_\infty \sum_{i=1}^k \sup_{n\in\mathbb{N}} \xi_n[J_i] < \infty \quad \textit{fast sicher.} \tag{$*$}$$

Nach Voraussetzung konvergieren die $\xi_n[J_i]$ in Verteilung gegen $\xi[J_i]$. Für alle $i = 1, \ldots, k$ ist die Menge $\big\{\xi_n[J_i] \bigm| n \in \mathbb{N}\big\}$ also relativ folgenkompakt und nach dem Satz von Prohorov (Satz 2.6.9, S. 77) auch straff. Daher gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $c \in \mathbb{R}^+$, so dass

$$P\Big[\sup_{n\in\mathbb{N}} \xi_n[J_i] < \frac{c}{k\|f\|_\infty}\Big] \geq 1 - \varepsilon \quad \textit{für alle } i = 1, \ldots, k.$$

Aus Ungleichung $(*)$ ergibt sich

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \xi_n[J_i] < \frac{c}{k\|f\|_\infty} \quad \textit{f.s. } \forall i = 1, \ldots, k \quad \Longrightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \langle f, \xi_n\rangle < c \quad \textit{f.s.}$$

und damit

$$P\Big[\sup_{n\in\mathbb{N}} \langle f, \xi_n\rangle < c\Big] \geq P\Big[\sup_{n\in\mathbb{N}} \xi_n[J_i] < \frac{c}{k\|f\|_\infty}\Big] \geq 1 - \varepsilon \quad \textit{für alle } i = 1, \ldots, k,$$

d.h. $\big\{\langle f, \xi_n\rangle \bigm| n \in \mathbb{N}\big\}$ ist straff. Eine weitere Anwendung des Satzes von Prohorov ergibt, dass $\big\{\xi_n \bigm| n \in \mathbb{N}\big\}$ auch schwach relativ folgenkompakt ist. Sei also $\{n'\}$ eine Teilfolge von $\{n''\}$, dann gibt es eine Teilfolge $\{n''\}$ von $\{n'\}$ und ein Zufälliges Maß $\zeta \in \mathfrak{L}(M_+(E))$ so dass

$$\xi_{n''} \xrightarrow{d} \zeta.$$

Aus der Implikation *(1)⇒(3)* können wir folgern, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und $J_1, \ldots, J_k \in \mathcal{J}$

$$\big(\xi_{n''}[J_1], \ldots, \xi_{n''}[J_k]\big) \xrightarrow{d} \big(\zeta[J_1], \ldots, \zeta[J_k]\big)$$

gilt. Da $\{n''\}$ eine Teilfolge von $\{n\}$ ist, gilt aber außerdem nach der Voraussetzung von *(3)*

$$\big(\xi_{n''}[J_1], \ldots, \xi_{n''}[J_k]\big) \xrightarrow{d} \big(\xi[J_1], \ldots, \xi[J_k]\big)$$

und damit

$$\big(\xi[J_1], \ldots, \xi[J_k]\big) \stackrel{d}{=} \big(\zeta[J_1], \ldots, \zeta[J_k]\big).$$

Laut Satz 2.7.3 folgt hieraus $\xi \stackrel{d}{=} \zeta$. Also hat jede Teilfolge von $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen ξ konvergente Teilfolge. Dies ist laut Lemma 1.1.45 auf Seite 26 hinreichend für

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi. \qquad \square$$

2.8 Punktprozesse

Die in Kapitel 3 auftretenden Zufälligen Maße werden zu einer speziellen Untergruppe gehören: den Punktprozessen. Diese sind Zufällige Maße deren Werte $\mathbb{N}_0$-wertige Maße sind. Ein wichtiger Punktprozess ist der sogenannte Poisson'schen Punktprozess. Dieser wird im Haupteil dieser Arbeit, dem Beweis des Satzes von Mikosch und Račkauskas (Theorems 3.3.1 auf Seite 113), eine zentrale Rolle spielen.

2.8.1 Bezeichnung Für einen Punkt p in einem Raum E mit beliebiger σ-Algebra $\mathcal{E}$ bezeichnet δ_p das Diracmaß von p auf $(E, \mathcal{E})$ mit

$$\delta_p[F] = \begin{cases} 1, & \textit{falls } p \in F \\ 0, & \textit{falls } p \notin F \end{cases} \quad \forall F \in \mathcal{E}.$$

Es wird später die Notation erleichtern, wenn wir δ_p auch für Punkte $p \notin E$ definieren:

$$\delta_p \equiv 0 \quad \forall p \notin E\ .$$

Auf diese Weise erhält man für ein Maß der Form $\sum_i \delta_{p_i}$ auf einem Raum E_1 automatisch seine Restriktion auf einen Raum $E_2 \subset E_1$. Um Verwirrungen zu vermeiden, sollte man daher immer den relevanten Raum mit angeben. So ist zum Beispiel δ_0 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, nicht jedoch auf $(\mathbb{R}_0, \mathfrak{B}(\mathbb{R}_0))$.

2.8.2 Definition (Punktmaß, Punktprozess) Sei E ein lokal kompakter, polnischer Raum. Ein **Punktmaß** auf E ist ein $\overline{\mathbb{N}}$-wertiges Radon-Maß auf E. Wir bezeichnen den Raum aller Punktmaße mit

$$M_p(E) := \left\{ m \in M_+(E) \;\middle|\; m \textit{ ist ein Punktmaß} \right\}.$$

Ein **Punktprozess** ist ein Zufälliges Maß N auf E mit $N_{(\omega)} \in M_p(E)$ für alle $\omega \in \Omega$.

2.8.3 Bemerkung Für einen lokal kompakten, polnischen Raum E ist ein Maß der Form

$$m = \sum_{i=1}^{\overline{n}} \delta_{p_i}$$

mit $\overline{n} \in \overline{\mathbb{N}}_0$ genau dann ein Punktmaß, wenn $m[K] < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subset E$.

2.8.4 Lemma *Sei E ein lokal kompakter, polnischer Raum und $m \in M_p(E)$. Dann gibt es*

(1) für jede kompakte Teilmenge K von E eine Folge relativ kompakter Mengen $R_1, R_2, \ldots \mathfrak{B}(E)$ mit $R_n \searrow K$ und $m[\partial R_n] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(2) offene, relativ kompakte Mengen $G_1, G_2, \ldots \in \mathfrak{B}(E)$ mit $m[\partial G_n] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $G_n \nearrow E$.

Beweis. *(1)*: Es sei $K \in \mathfrak{B}(E)$ kompakt und ρ eine Metrik auf E. Laut Satz 2.3.10 auf Seite 65 ist

$$\mathfrak{R}_m(E) := \left\{R \in \mathfrak{B}(E) \;\middle|\; R \in \mathfrak{R}(E),\ m[\partial E] = 0\right\}$$

ein DC-Semiring. Also gibt es endlich viele $G_1, \ldots, G_k \in \mathfrak{R}_m(E)$ mit Durchmesser $\rho(G_i) < \delta$ und

$$R'_\delta := \bigcup_{j=1}^{k} G_j \supset K.$$

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $K \cap G_j \neq \emptyset$ für alle $j = 1, \ldots, k$ ist. Da der Durchmesser der G_j kleiner als δ ist, ist

$$G_j \subset K^{(\delta)} := \left\{x \in E \;\middle|\; d(x, K) < \delta\right\} \quad \textit{für alle } j = 1, \ldots, k.$$

Also ist $K \subset R'_\delta \subset K^{(\delta)} \searrow K$. Nach Satz 2.3.10 ist $\mathfrak{R}_m(E)$ schnitt- und vereinigungsstabil. Also ist mit den G_j auch R'_δ und damit

$$R_n := \bigcap_{j=1}^{n} R'_{j^{-1}} \in \mathfrak{R}_m(E)$$

und es gilt $K \subset R_n \subset R'_n \subset K^{(n^{-1})} \searrow K$. Also haben $R_1, R_2, \ldots$ die gewünschten Eigenschaften.

(2): E ist lokal kompakt und separabel, also kann E mit abzählbar vielen kompakten Mengen $K_1, K_2, \ldots$ überdeckt werden. Da $\mathfrak{R}^\circ_m(E) = \mathfrak{R}_m(E) \cap \left\{V \in E \;\middle|\; V \textit{ ist offen in } E\right\}$ ein DC-System ist (siehe Satz 2.3.10), kann jedes K_i mit endlich viele Mengen $G'_{1,i} \ldots, G'_{k_i,i} \in \mathfrak{R}^\circ_m(E)$ überdeckt werden. $\mathfrak{R}^\circ_m(E)$ ist vereinigungsstabil, somit ist $G_n := \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{k_i} G'_{j,i} \in \mathfrak{R}^\circ_m(E)$. Es gilt: $G_n \supset K_n \nearrow E$. □

2.8.5 Korollar *Ist E ein lokal kompakter, polnischer Raum und $m \in M_p(E)$, so ist*

$$\mathfrak{B}(E) = \sigma(\mathfrak{R}_m(E)).$$

Beweis. „$\supset$“: $\mathfrak{R}_m(E) \subset \mathfrak{B}(E) \;\Rightarrow\; \sigma(\mathfrak{R}_m(E)) \subset \sigma(\mathfrak{B}(E)) \subset \mathfrak{B}(E)$ (siehe Lemma 2.3.7 auf Seite 63).

„$\subset$“: Wir wissen, dass $\mathfrak{B}(E)$ von $\mathcal{K} := \{K \subset E \mid K \textit{ist kompakt}\}$, den kompakten Teilmengen von E, erzeugt wird. Sei $K \subset E$ kompakt. Es gibt laut Lemma 2.8.4 Mengen $R_1, R_2, \ldots \in \mathfrak{R}_m(E)$ mit $G_n \searrow K$ und somit $\bigcup_{i=1}^\infty R_i^c = K^c \in \sigma(\mathfrak{R}_m(E))$. Demnach ist auch $K \in \sigma(\mathfrak{R}_m(E))$. Also gibt es ein Erzeugendensystem $\mathcal{K}$ von $\mathfrak{B}(E)$ mit $\mathcal{K} \subset (\mathfrak{R}_m(E))$, womit $\mathfrak{B}(E) \subset \sigma(\mathfrak{R}_m(E))$ gezeigt ist. □

2.8.6 Lemma *Auf einem lokal kompakten, polnischen Raum E ist ein Maß m genau dann ein Punktmaß, wenn für alle $R \in \mathfrak{R}_m(E)$ gilt $\mu[R] \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. „$\Rightarrow$“ gilt offensichtlich. Für „$\Leftarrow$“ zeigen wir zunächst, dass das Mengensystem

$$\mathcal{F} := \left\{ B \in \mathfrak{B}(E) \;\middle|\; m[B] \in \overline{\mathbb{N}}_0 \right\}$$

ein Dynkin-System (siehe Definition 2.1.1, S.2.1.1) ist.

D1: Es gibt laut Lemma 2.8.4 auf der vorherigen Seite $R_1, R_2, \ldots \in \mathfrak{R}_m(E)$ mit $R_n \nearrow E$. Es gilt $m[R_n] \nearrow m[E]$ und da nach Voraussetzung $m[R_n] \in \mathbb{N}_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, muss $m[E] \in \overline{\mathbb{N}}_0$ sein.

D2: Folgt sofort aus den elementaren Eigenschaften eines Maßes.

D3: Man zeigt dies wie D1, nur dass die A_i nicht in $\mathfrak{R}_m(E)$ liegen müssen, sondern per Definition aus $\mathcal{F}$ sind.

Da $\mathfrak{R}_m(E)$ eine schnittstabile Teilmenge von $\mathcal{F}$ ist und gleichzeitig $\mathfrak{B}(E)$ erzeugt (Korrolar 2.8.5 auf der vorherigen Seite), ist mit dem Satz von Dynkin (Satz 2.1.2 auf Seite 40) $\mathfrak{B}(E) \subset \mathcal{F}$, also $m[B] \in \overline{\mathbb{N}}_0$ für alle $B \in \mathfrak{B}(E)$. □

2.8.7 Satz *Für einen lokal kompakten, polnischen Raum E ist $M_p(E)$ eine bezüglich der vagen Topologie $\mathcal{T}_v(M_+(E))$ abgeschlossene Teilmenge von $M_+(E)$. Das heißt: Sind $m_1, m_2, \ldots \in M_p(E)$ und gibt es ein $m \in M_+(E)$ mit $m_n \xrightarrow{v} m$, so ist auch $m \in M_p(E)$.*

Beweis. Sei $m_1, m_2, \ldots \in M_p(E)$ mit $m_n \xrightarrow{v} m$ für ein $m \in M_+(E)$. Es gibt offene Mengen $G_1, G_2, \ldots \in \mathfrak{R}_m(E)$ mit $G_n \nearrow E$ (Lemma 2.8.4 auf der vorherigen Seite garantiert uns die Existenz). Betrachte für festes $n \in \mathbb{N}$ das Mengensystem

$$\mathcal{F}_n := \left\{ F \in \mathfrak{B}(E) \;\middle|\; m[F \cap G_n] \in \mathbb{N} \right\}.$$

Wir zeigen zuerst $\mathfrak{R}_m(E) \subset \mathcal{F}_n$: Nach Satz 2.4.1 auf Seite 66 folgt aus $m_n \xrightarrow{v} m$, dass $m_n[G_n] \xrightarrow{n\to\infty} m[G_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $m_n[G_n] \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und da m nach Voraussetzung ein Radon-Maß ist, muss $m[G_n] \in \mathbb{N}$ sein für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $R \in \mathfrak{B}(E)$ relativ kompakt, so gibt es ein n_0 mit $R \subset G_{n_0} = \bigcup_{i=1}^{n_0}$ (da die G_n offen sind). Also ist $m[R] \in \mathbb{N}_0$ und das ist nach Lemma 2.8.6 hinreichend für $m \in M_p(E)$. □

2.8.8 Lemma *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und E ein lokal kompakter, polnischer Raum. Weiterhin seien $Y_1, Y_2, \ldots : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (E, \mathfrak{B}(E))$ und $M : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\overline{\mathbb{N}}_0, \mathcal{P}(\overline{\mathbb{N}}_0))$ messbar. Dann ist*

$$N := \sum_{i=1}^{M} \delta_{Y_i}$$

genau dann ein Punktprozess auf E, wenn $N_\omega[K] < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subset E$, $\omega \in \Omega$.

Beweis. „⇒“: Diese Richtung gilt offensichtlich, da N_ω für alle $\omega \in \Omega$ ein Radon-Maß ist.

„⇐“: Nach Voraussetzung ist N für jedes ω ein Radon-Maß. Es bleibt also nur noch die Messbarkeit zu zeigen. Nach Lemma 2.5.7 auf Seite 72 reicht es, zu zeigen, dass $N[G]$ für alle offenen und relativ kompakten $G \in \mathfrak{B}(E)$ messbar ist. Für solche G nimmt $N[G]$ nur Werte in $\mathbb{N}_0$ an, demnach brauchen wir lediglich zu zeigen, dass

$$N[G]^{-1}(\{k\}) \in \mathcal{A} \;\; \textit{für alle} \;\; k \in \mathbb{N}_0$$

gilt. Sei $k \in \mathbb{N}_0$:

$$N[G]^{-1}(\{k\}) = \bigcup_{l=1}^{k} \Big(\underbrace{\{M = l\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \Big\{ \sum_{j=1}^{l} \delta_{Y_j}[G] = k \Big\} \Big)$$

und für die Menge der Permutationen $\mathfrak{S}_l := \big\{ \tau : (1, \dots, l) \longrightarrow (1, \dots, l) \;\big|\; \tau \textit{ bijektiv} \big\}$ ist

$$\Big\{ \sum_{j=1}^{l} \delta_{Y_j}[G] = k \Big\} = \bigcup_{\tau \in \mathfrak{S}_l} \Big(\bigcap_{j=1}^{k} \underbrace{\{Y_{\tau(j)} \in G\}}_{\in \mathcal{A}} \bigcap_{j=k+1}^{l-k} \underbrace{\{Y_{\tau(j)} \notin G\}}_{\in \mathcal{A}} \Big) \in \mathcal{A}.$$

Also ist auch $N[G]^{-1}(\{k\}) \in \mathcal{A}$ für alle offenen und relativ kompakten $G \in \mathfrak{B}(E)$. □

2.8.9 Bemerkung Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.8.8 sei $p_0 \in E$ und $p_\infty \notin E$ ein zusätzlicher Punkt. Weiterhin sei $\acute{E} = (E \cup \{p_\infty\}) \backslash \{p_0\}$, versehen mit der σ-Algebra

$$\acute{\mathcal{F}} := \big\{ F \in \mathcal{P}(\acute{E}) \;\big|\; F \cap E \in \mathfrak{B}(E) \big\}.$$

Dann lässt sich analog zu obigem Beweis zeigen, dass Satz 2.8.8 richtig bleibt, wenn man die Y_i durch $\acute{E}$-wertige Zufallsvariablen $\acute{Y}_i : \Omega \longrightarrow \acute{E}$ ersetzt, d.h.

$$\acute{N} := \sum_{i=1}^{M} \delta_{\acute{Y}_i}$$

ist ein Punktprozess auf E, falls $\acute{N}_\omega[K] < \infty$ ist für alle kompaktem Mengen $K \subset E$. Insbesondere gilt diese Bemerkung damit für $E^h = \mathbb{R}^h$ und $\acute{E} = \acute{\mathbb{R}}^h$ und umgekehrt (vgl. 1.3.10 auf Seite 38).

2.8.10 Definition (Poisson'scher Punktprozess) Es sei μ ein Maß (nicht notwendig ein Radon-Maß) auf einem lokal kompakten, polnischen Raum E. Ein Punktprozess auf E, heißt **Poisson'scher Punktprozess mit Intensitätsmaß** μ ($PPP\mu$), falls gilt:

(1) $P\big[N[F] = k\big] = \begin{cases} \exp\big(-\mu[F]\big) \frac{\mu[F]^k}{k!}, & \textit{falls } \mu[F] < \infty \\ 0, & \textit{falls } \mu[F] = \infty \end{cases}$

(2) Für alle $k \in \mathbb{N}$ und disjunkte Mengen $F_1, \dots, F_k \in \mathfrak{B}(E)$ sind $N[F_1], \dots, N[F_k]$ unabhängige Zufallsvariaben.

2.8.11 Bemerkung Ist N ein Poisson'scher Punktprozess, so ist für $F \in \mathfrak{B}(E)$ die nichtnegative Zufallsvariable $N[F]$ $Poisson(\mu[F])$-verteilt (vgl. Beispiel 2.6.2 auf Seite 74).

2.8.12 Satz *Für die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}_N : C_K^+(E) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ eines Poisson'schen Punktprozesses N zum Intensitätsmaß μ auf einem lokal kompakten, polnischen Raum E ist*

$$\mathcal{L}_N(f) = \exp\Big(-\int_E 1 - \exp(-f)\; d\mu\Big) \quad \textit{für alle } f \in C_K^+(E).$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage durch „algebraische Induktion". Zwar ist $\mathcal{L}_N$ eigentlich auf $C_K^+(E)$ definiert, wir verwenden in diesem Beweis aber dennoch auch für $g \notin C_K^+(E)$ die Notation

$$\mathcal{L}_N(g) := \mathbb{E}_P\big(\exp(-\langle g, N\rangle)\big).$$

1.Schritt: $g = t\mathbb{I}_F$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$ und $F \in \mathfrak{B}(E)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_N(g) &:= \mathbb{E}\big(\exp(-\langle g, N\rangle)\big) = \mathbb{E}\big(\exp(-tN[F])\big) = \mathcal{L}_{N[F]}(t) \\
&= \exp\big(-\mu[F](1-\exp(-t))\big) && \scriptstyle N[F]\sim Poi(\mu[F]) \text{ vgl. Bsp. 2.6.2} \\
&= \exp\Big(-\int_E (1-\exp(-t))\mathbb{I}_F(x)\; d\mu(x)\Big) \\
&= \exp\Big(-\int_E 1-\exp(-t\mathbb{I}_F(x))\; d\mu(x)\Big) && (*) \\
&= \exp\Big(-\int_E 1-\exp(-g(x))\; d\mu(x)\Big)
\end{aligned}$$

Zu $(*)$:

$$(1-\exp(-t))\mathbb{I}_F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1-\exp(-t), & \textit{falls } x \in F \\ 0, & \textit{sonst} \end{array} \right\} = 1 - \exp(-t\mathbb{I}_F(x))$$

2. Schritt: $g = \sum_{i=1}^k t_i\mathbb{I}_{F_i}$ mit $t_1 \dots t_k \in \mathbb{R}_0^+$ und $F_1 \dots F_k \in \mathfrak{B}(E)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_N(g) &= \mathbb{E}\Big(\exp\Big(-\Big\langle \sum_{i=1}^k t_i\mathbb{I}_{F_i}, N\Big\rangle\Big)\Big) = \mathbb{E}\Big(\exp\sum_{i=1}^k(-t_iN[F_i])\Big) \\
&= \prod_{i=1}^k \mathbb{E}\big(-t_iN[F_i]\big) = \prod_{i=1}^k \mathcal{L}_N(t_i\mathbb{I}_{F_i}) && \scriptstyle\text{unabh.} \\
&= \prod_{i=1}^k \exp\Big(-\int_E 1-\exp(-t_i\mathbb{I}_{F_i}(x))\; d\mu(x)\Big) && \scriptstyle\text{siehe Schritt 1} \\
&= \exp\Big(-\int_E \sum_{i=1}^k 1-\exp(-t_i\mathbb{I}_{F_i}(x))\; d\mu(x)\Big)
\end{aligned}$$

$$= \exp\Big(-\int_E 1-\exp\Big(-\sum_{i=1}^k t_i \mathbb{I}_{F_i}(x)\Big)\ d\mu(x)\Big) \qquad (**)$$
$$= \exp\Big(-\int_E 1-\exp(-g(x))\ d\mu(x)\Big)$$

Zu $(**)$:

$$\sum_{i=1}^k 1-\exp(-t_i\mathbb{I}_{F_i}(x)) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & \textit{falls } x\notin \bigcup_{i=1}^k F_i \\ 1-\exp(-t_i), & \textit{falls } x\in F_i \end{array}\right\} = 1-\exp\Big(-\sum_{i=1}^k t_i\mathbb{I}_{F_i}(x)\Big)$$

3.Schritt: $f\in C_K^+(E)$.

Eine nichtnegative stetige Funktion mit kompaktem Träger $f\in C_K^+(E)$ kann sicherlich durch eine Funktionenfolge von $f_n := \sum i = 1^n t_{i,n}\mathbb{I}_{F_{i,n}}$ mit für alle $n\in\mathbb{N}$ disjunkten $F_{1,n},\dots,F_{n,n}$ und nichtnegativen $t_{i,n}\in\mathbb{R}_0^+$ derart $f_n\nearrow f$ approximiert werden. Für die f_n haben wir die zu beweisende Aussage bereits in *Schritt 2* gezeigt. Laut dem Satz von der monotonen Konvergenz (Satz 2.1.30 auf Seite 49) gilt

$$\langle f_n, N_\omega\rangle = \int_E f_n\ dN_\omega \nearrow \int_E f\ dN_\omega = \langle f, N_\omega\rangle.$$

Des Weiteren ist $\exp(-\langle f_n, N\rangle)\le 1$ und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß, also endlich. Somit können wir den Satz von der dominierten Konvergenz 2.1.31 auf Seite 49 anwenden und erhalten:

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}_N(f_n) = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \exp\big(-\langle f_n, N_\omega\rangle\big)\ dP(\omega) = \int_\Omega \exp\big(-\langle f, N_\omega\rangle\big)\ dP(\omega) = \mathcal{L}_N(f).$$

Den Grenzwert der $\mathcal{L}_N(f_n)$ können wir mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz berechnen als

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\mathcal{L}_N(f_n) &\overset{\textit{Schritt 2}}{=} \lim_{n\to\infty}\exp\Big(-\int_E 1-\exp(-f_n(x))\ d\mu(x)\Big)\\ &\overset{\textit{mon. Konv.}}{=} \exp\Big(-\int_E 1-\exp(-f(x))\ d\mu(x)\Big).\end{aligned}$$

Demnach ist $\mathcal{L}_N(f) = \exp\big(-\int_E 1-\exp(-f(x))\ d\mu(x)\big)$. □

2.8.13 Theorem *Ist E ein polnischer Raum und μ ein Maß auf $(E,\mathfrak{B}(E))$, so gibt es einen Poisson'schen Punktprozess N zum Intensitätsmaß μ auf $(E,\mathfrak{B}(E))$. Die Verteilung von N ist durch die charakterisierenden Eigenschaften (1) und (2) aus Definition 2.8.10 eindeutig festgelegt.*

Beweis. Die Eindeutigkeit der Verteilung folgt sofort aus Satz 2.6.12 auf Seite 78. Bleibt noch die Existenz zu zeigen.

Wir konstruieren einen Poissonschen'Punktprozess zum Intensitätsmaß μ. Hierzu nehmen wir zunächst an, dass μ ein endliches Maß auf E ist.

Da μ endlich ist, gibt es ein $c \in \mathbb{R}_0^+$ mit $\mu = c \cdot \nu$ für ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf E. Es sei

$$\Omega := \mathbb{N}_0 \times E \times E \times \dots$$

versehen mit der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \otimes \mathfrak{B}(E) \otimes \mathfrak{B}(E) \otimes \dots$ und dem Produkt-Wahrscheinlichkeitsmaß $P := \rho_c \times \nu \times \nu \times \dots$, wobei ρ_c *Poisson(c)*-verteilt ist, das heißt

$$\rho_c[\{k\}] := \exp(-c)\frac{c^k}{k!}$$

ist. Weiterhin seien

$$\begin{aligned} M &:= \pi_1 : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto x_1 \quad \textit{und} \\ Y_j &:= \pi_{j+1} : \Omega \longrightarrow E,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto x_{j+1}. \end{aligned}$$

Die $Y_1, Y_2, \dots$ und M sind stetig und demnach messbar. Wir definieren nun

$$N := \sum_{j=1}^{M} \delta_{Y_j}.$$

Da $M(\Omega) \subset \mathbb{N}_0$ und daher $N[K] < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \in \mathfrak{B}(E)$, ist N nach Lemma 2.8.8 auf Seite 86 ein Punktprozess. Wir müssen also nur noch die charakterisierenden Eigenschaften *(1)* und *(2)* eines Poisson'schen Punktprozesses nachweisen:

(1): Sei $F \in \mathfrak{B}(E)$.

$$\begin{aligned} P\big[N[F]=k\big] &= P\Big[\sum_{j=1}^{M} \delta_{Y_j}[F] = k\Big] \\ &= P\Big[\bigcup_{l=k}^{\infty}\Big(\{M=l\} \cap \Big\{\sum_{j=1}^{l} \delta_{Y_j}[F]=k\Big\}\Big)\Big] \\ &= \sum_{l=k}^{\infty} P\Big[\{M=l\} \cap \Big\{\sum_{j=1}^{l} \delta_{Y_j}[F]=k\Big\}\Big] && \scriptstyle \{M=l\}\ \textit{disjunkt} \\ &= \sum_{l=k}^{\infty} P\Big[M=l\Big] \cdot \underbrace{P\Big[\sum_{j=1}^{l} \delta_{Y_j}[F]=k\Big]}_{\sim bin(\nu[F])} && \scriptstyle \textit{unabh.} \\ &= \sum_{l=k}^{\infty} \exp(-c)\frac{c^l}{l!} \cdot \binom{l}{k} \nu[F]^k (1-\nu[F])^{l-k} \\ &= \exp(-c) \cdot \sum_{l=k}^{\infty} \frac{(c\nu[F])^k}{k!} \cdot \frac{(c(1-\nu[F]))^{l-k}}{(l-k)!} \end{aligned}$$

$$= \exp(-c) \cdot \frac{(c\nu[F])^k}{k!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(c(1-\nu[F]))^m}{m!} \qquad {\scriptstyle m:=l-k}$$

$$= \exp(-c) \cdot \frac{(c\nu[F])^k}{k!} \cdot \exp(c(1-\nu[F]))$$

$$= \exp(-\mu[F]) \cdot \frac{\mu[F]^k}{k!}$$

Da μ nach Annahme endlich ist, gilt Eigenschaft *(1)* damit für alle $F \in \mathfrak{B}(E)$.

(2): Wir zeigen zuerst, dass $N[F_1], \ldots, N[F_k]$ für eine endliche Partition aus messbaren Mengen $F_1, \ldots, F_k$ von E unabhängig sind. Seien also $F_1, \ldots, F_k \in \mathfrak{B}(E)$ disjunkt und $\bigcup_{i=1}^k F_i = E$. Beachte, dass dann $\sum_{i=1}^k P[Y_j \in F_i] = \sum_{i=1}^k \nu[F_i] = \nu[E] = 1$ ist und demnach (aufgrund der Unabhängigkeit der Y_i)

$$\sum_{i=1}^n \big(\delta_{Y_i}[F_1], \ldots, \delta_{Y_i}[F_k]\big)$$

multinomialverteilt zum Index $(n, \nu[F_1], \ldots, \nu[F_k])$ ist. Wir berechnen nun die gemeinsame Verteilung der $N[F_j]$. Sei hierzu $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ und $n = \sum_{i=1}^k n_i$:

$$\begin{aligned}
&P\big[N[F_1] = n_1, \ldots, N[F_k] = n_k\big] \\
&= P\Big[M = n,\ \sum_{i=1}^n \delta_{Y_i}[F_1] = n_1, \ldots, \sum_{i=1}^n \delta_{Y_i}[F_k] = n_k,\Big] \\
\overset{\textit{unabh.}}{}&= P\big[M = n\big] \cdot P\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^n \big(\delta_{Y_i}[F_1], \ldots, \delta_{Y_i}[F_k]\big)}_{\sim mult(n,\nu[F_1],\ldots,\nu[F_k])} = (n_1, \ldots, n_k)\Big] \\
&= \exp(-c)\frac{c^n}{n!} \cdot \frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!} \prod_{i=1}^k \nu[F_i]^{n_i} \\
&= \prod_{i=1}^k \exp(-c\nu[F_i]) c^{n_i} \cdot \prod_{i=1}^k \frac{\nu[F_i]^{n_i}}{n_i!} \\
&= \prod_{i=1}^k \exp(-c\nu[F_i]) \frac{(c\nu[F_i])^{n_i}}{n_i!} = \prod_{i=1}^k \exp(-\mu[F_i]) \frac{(\mu[F_i])^{n_i}}{n_i!} \\
&= \prod_{i=1}^k P\big[N[F_i] = n_i\big],
\end{aligned}$$

also sind die $N[F_1], \ldots, N[F_k]$ unabhängig. Seien nun $G_1, \ldots, G_k \in \mathfrak{B}(E)$ beliebige disjunkte Mengen. Dann ist $G_{k+1} := E \backslash \big(\bigcup_{i=1}^k G_i\big)$ messbar und $G_1, \ldots, G_{k+1}$ sind nach obiger Rechnung unabhängig, also sind auch die $G_1, \ldots, G_k$ unabhängig.

Wir müssen nun die Aussage noch für unendliches μ zeigen. Es seien $D_1, D_2 \ldots$ disjunkte, relativ kompakte Teilmengen von E mit $\bigcup_{i=1}^\infty D_i = E$ und $\bigcup_{i=1}^n D_i$ offen für alle $n \in \mathbb{N}$ (Lemma 1.2.5 auf Seite 32 garantiert uns die Existenz). Da die D_j relativ kompakt sind und μ ein Radon-Maß ist, sind

$$\mu_j : \mathfrak{B}(E) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ F \longmapsto \mu[F \cap D_j], \quad j \in \mathbb{N}$$

endliche Maße. Offensichtlich gilt $\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j$. Nach dem ersten Teil des Beweises wissen wir, dass es für jedes $j \in \mathbb{N}$ einen Poisson'schen Punktprozess N_j zum Intensitätsmaß μ_j gibt. Wir wählen die N_j derart, dass sie unabhängig sind. Wir zeigen nun, dass

$$N := \sum_{j=1}^{\infty} N_j$$

ein Poisson'scher Punktprozess zu Intensitätsmaß μ ist. Beachte, dass nach Eigenschaft *(1)* eines Poisson'schen Punktprozesses $N_j[\bullet \cap D_j^c] \equiv 0$ ist.

Wir zeigen zuerst, dass N ein Punktprozess (also messbar, mit Werten in $M_p(E)$) ist. Sei $R \in \mathfrak{B}(E)$ relativ kompakt, d.h. $\overline{R}$ kompakt. Da $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(\bigcup_{i=1}^{n} D_i\big) = E \supset \overline{R}$ und da $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$ offen ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $R \subset \overline{R} \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} D_i$ und damit insbesondere $R \subset D_j^c$ für alle $j > n_0$. Weil $N_j[\bullet \cap D_j^c] \equiv 0$ ist , ist $N_j[R] \equiv 0$ für alle $j > n_0$. Demnach ist $N[R] = \sum_{j=1}^{\infty} N_j[R] = \sum_{j=1}^{n_0} N_j[R] = N^{(n_0)}[R] \in \mathbb{N}$. Die N_j und somit auch $N^{(n_0)}$ sind endlich mit Werten in $M_p(E)$. Es gilt also:

(a) $N[R] = N^{(n_0)}[R]$ ist messbar für alle $R \in \mathfrak{R}(E)$,

(b) $N_{(\omega)}[R] = N_{(\omega)}^{(n_0)}[R] \in \mathbb{N}$ für alle $\omega \in \Omega$.

Aus (b) folgt die $M_p(E)$-wertigkeit von N (siehe Lemma 2.8.6 auf Seite 86) und aus (a) und (b) folgt, die Messbarkeit von N, also ist N ein Punktprozess (siehe Lemma 2.5.7 auf Seite 72).

Es bleibt zu zeigen, dass N nicht nur ein Punktprozess, sondern auch ein Poisson'scher Punktprozess ist. Wir wissen aus dem Eindeutigkeitssatz für Laplace-Transformierte Zufälliger Maße (Satz 2.6.12 auf Seite 78) und Satz 2.8.12 auf Seite 88, dass nur ein Poisson'scher Punktprozess zum Intensitätsmaß μ eine Laplace-Transformierte mit

$$\mathcal{L}_{PPP_\mu}(f) = \exp\Big(-\int_E 1 - \exp\big(-f(x)\big)\ d\mu(x)\Big) \quad \textit{für alle } f \in C_K^+(E)$$

hat. Also berechnen wir nun $\mathcal{L}_N(f)$ für $f \in C_K^+(E)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_N(f) &= \mathbb{E}\Big(\exp\Big(-\Big\langle f, \sum_{j=1}^{\infty} N_j \Big\rangle\Big)\Big) \\
\overset{\textit{dom. Konv. (Satz 2.1.31)}}&{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(\exp\Big(-\Big\langle f, \sum_{j=1}^{n} N_j \Big\rangle\Big)\Big) \\
\overset{\textit{unabh.}}&{=} \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}\big(\exp(-\langle f, N_j\rangle)\big)}_{\mathcal{L}_{N_j}(f)} \\
\overset{\textit{Satz 2.8.12}}&{=} \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \exp\Big(-\int_E 1 - \exp\big(-f(x)\big)\ d\mu_j(x)\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\Big(-\sum_{j=1}^{n} \int_E 1 - \exp\big(-f(x)\big)\ d\mu_j(x)\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \exp\Big(-\int_E 1-\exp\big(-f(x)\big)\ d\sum_{j=1}^n \mu_j(x)\Big)\\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\Big(-\int_E 1-\exp\big(-f(x)\big)\cdot \mathbb{I}_{\bigcup_{j=1}^n D_j}(x)\ d\mu(x)\Big)\\
\overset{\text{mon. Konv. (Satz 2.1.30)}}{=}\ & \exp\Big(-\int_E 1-\exp\big(-f(x)\big)\ d\mu(x)\Big)
\end{aligned}$$

□

2.8.14 Satz *Es seien E_1 und E_2 lokal kompakte, polnische Räume. Für eine bezüglich der zugehörigen Borel'schen σ-Algebren $\mathfrak{B}(E_1)$ und $\mathfrak{B}(E_2)$ messbaren Abbildung*

$$T : (E_1, \mathfrak{B}(E_1)) \longrightarrow (E_2, \mathfrak{B}(E_2))$$

und einen Poisson'schen Punktprozess $N : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (M_+(E_1), \mathcal{M}_+(E_1))$ auf E_1 mit Intensitätsmaß μ, ist

$$\widetilde{N} := N \circ T^{-1} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (M_+(E_2), \mathcal{M}_+(E_2))$$

ein Poisson'scher Punktprozess auf E_2 mit Intensitätsmaß $\mu \circ T^{-1}$. Hat N eine Darstellung

$$N = \sum_{i=1}^\infty \delta_{X_i},$$

so hat $\widetilde{N}$ eine Darstellung

$$\widetilde{N} = \sum_{i=1}^\infty \delta_{T(X_i)}$$

Beweis. Wir weisen nach, dass $\widetilde{N}$ die charakterisierenden Eigenschaften *(1)* und *(2)* eines Poisson'schen Punktprozesses hat: Seien $F_1, \ldots, F_k$ disjunkt und messbar, dann ist

$$\begin{aligned}
P\big[\widetilde{N}[F_1] = n_1, \ldots, \widetilde{N}[F_k] = n_k\big] &= P\big[N \circ T^{-1}[F_1] = n_1, \ldots, N \circ T^{-1}[F_k] = n_k\big]\\
&= P\big[N[T^{-1}(F_1)] = n_1, \ldots, N[T^{-1}(F_k)] = n_k\big]\\
\overset{\text{Eigenschaft (2) des } N}{=}\ & \prod_{i=1}^k P\big[N[T^{-1}(F_i)] = n_i\big]\\
\overset{\text{Eigenschaft (1) von } N}{=}\ & \prod_{i=1}^k \exp\big(-\mu[T^{-1}(F)]\big)\frac{\mu[T^{-1}(F)]^k}{k!}\\
&= \prod_{i=1}^k \exp\big(-\mu \circ T^{-1}[F]\big)\frac{\mu \circ T^{-1}[F]^k}{k!}
\end{aligned}$$

Mit $k = 1$ folgt Eigenschaft *(1)* und aus der Produktgestalt Eigenschaft *(2)* von $\widetilde{N}$. □

2.8.15 Satz *Es sei E ein lokal kompakter, polnischer Raum und für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit Werten in E. Ist nun μ ein Radon-Maß auf E und gilt in $M_+(E)$ die Konvergenz*

$$nP_{X_{n,1}} \xrightarrow{v} \mu \ ,$$

so gilt in $\mathfrak{L}(M_+(E))$ die Konvergenz

$$N_n := \sum_{j=1}^{n} \delta_{X_{n,j}} \xrightarrow{d} N \ ,$$

wobei N ein Poisson'scher Punktprozess zum Intensitätsmaß μ ist.

Beweis: Es reicht aus, die punktweise Konvergenz der Laplace-Transformierten nachzuweisen (vgl. Theorem 2.6.13 auf Seite 79). Sei hierzu $f \in C_K(E)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{N_n}(f) &= \int_\Omega \exp\Big(-\int_E f(x)\ dN_\omega(x)\Big)\ dP(\omega) = \int_\Omega \exp\Big(-\int_E f(x)\ d\Big(\sum_{j=1}^n \delta_{X_{n,j}}\Big)\Big)\ dP(\omega) \\
&= \int_\Omega \exp\Big(-\sum_{j=1}^n \int_E f(x)\ d\delta_{X_{n,j}}\Big)\ dP(\omega) = \int_\Omega \exp\Big(-\sum_{j=1}^n f(X_{n,j})\Big)\ dP(\omega) \\
&= \mathbb{E}\Big(\exp\Big(-\sum_{j=1}^n f(X_{n,j})\Big)\Big) \overset{u.i.v.}{=} \Big(\mathbb{E}\big(\exp(-f(X_{n,1}))\big)\Big)^n \\
&= \Big(1 - \frac{n}{n}\mathbb{E}\Big(1 - \exp\big(-f(X_{n,1})\big)\Big)\Big)^n \overset{Satz\ 2.1.7}{=} \Big(1 - \frac{n\int_E \big(1-\exp(-f(x))\big)\ dP_{X_{n,1}}}{n}\Big)^n \\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\Big(-\lim_{n\to\infty} n \int_E \big(1-\exp(-f(x))\big)\ dP_{X_{n,1}}\Big) && (*) \\
&= \exp\Big(-\int_E \big(1-\exp(-f(x))\big)\ d\mu\Big) && (**)
\end{aligned}$$

Bei $(*)$ haben wir verwendet, dass $(1+\frac{y}{n})^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(y)$ *gleichmäßig auf kompakten Mengen* und bei der Berechnung von $(**)$ haben wir ausgenutzt, dass $\big(1-\exp\circ(-f)\big)^{-1}\big(\mathbb{R}\backslash\{0\}\big) \subset f^{-1}\big(\mathbb{R}\backslash\{0\}\big)$ relativ kompakt ist (vgl. Satz 1.1.26 auf Seite 18) und $\big(1-\exp\circ(-f)\big)$ somit einen kompakten Träger hat. Die Konvergenz folgt dann aus $nP_{X_{n,1}} \xrightarrow{v} \mu$.

$\exp\big(-\int_E 1-\exp\big(-f(x)\big)\ d\mu\big)$ ist nach Satz 2.8.12 auf Seite 88 die Laplace-Transformierte eines Poisson'schen Punktprozesses auf E mit Intensitätsmaß μ. $\square$

3 Der Satz von Mikosch und Račkauskas

Dieses Kapitel ist dem Beweis des Satzes von Mikosch und Račkauskas gewidmet. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels (3.1) werden wir hierzu den Begriff der regulär variierenden Zufallsvariablen einführen und deren relevante Eigenschaften, sowie einige wichtige Sätze dieses Theoriebereichs, die später in Abschnitt 3.3 Anwendung finden werden, vorstellen.
Anschließend untersuchen wir in Abschnitt 3.2 das Konvergenzverhalten bestimmter Punktprozesse (Korollar 3.2.4), welche es uns schließlich ermöglichen, in Abschnitt 3.3 den Satz von Mikosch und Račkauskas (Theorem 3.3.1) mit Standardtechniken der Extremwerttheorie herzuleiten.
Ein erster Überblick über die Struktur des Beweis des Theorems kann auf den Seiten 7 f. in der Einleitung dieser Arbeit gewonnen werden.

3.1 Regulär variierende reelle Zufallsvariablen

3.1.1 Definition (Reguläre Variation) Eine (für x gegen unendlich) **langsam variierende** Abbildung ist eine Abbildung $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mit der Eigenschaft

$$\frac{L(cx)}{L(x)} \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \forall c \in \mathbb{R}^+.$$

Wir nennen eine Abbildung $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ **regulär variierend** zum Index α, falls es eine langsam variierende Abbildung L gibt, so dass

$$f(x) = x^{-\alpha} L(x) \ \textit{ für alle } x \in \mathbb{R}^+.$$

Wir nennen $\mathbb{R}$- bzw. $\acute{\mathbb{R}}$-wertige Zufallsvariable X **regulär variierend** zum Index α, falls (ggf.) $P[X = p_\infty] = 0$ ist und

(1) die Abbildung $P[|X| > \bullet] : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ x \longmapsto P[|X| > x]$ regulär zum Index α variiert und

(2) es positive reelle Zahlen p, q mit $p + q = 1$ gibt, so dass

$$\frac{P[X > x]}{P[|X| > x]} \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} p \ \text{ und } \ \frac{P[X \le -x]}{P[|X| > x]} \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} q.$$

3.1.2 Beispiel Ein einfaches Beispiel für eine langsam variierende Funktion ist eine beliebige asymptotisch konstante Funktion $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mit $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$.
Es gibt aber auch unbeschränkte langsam variierende Funktionen, wie beispielsweise die Abbildung

$$\log_a(\bullet + 1) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ x \longmapsto \log_a(x+1)$$

mit $a > 1$, denn es gilt

$$\frac{\log_a(cx+1)}{\log_a(x+1)} = \frac{\log_a(x+1) - \log_a(x+1) + \log_a(1+x)}{\log_a(x+1)} = 1 + \frac{\log_a(\frac{cx+1}{x+1})}{\log_a(x+1)} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

3.1.3 Lemma *Seien $f, f' : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ regulär variierend zum Index α bzw α'. Dann gilt:*

(1) $f \cdot f'$ ist regulär variierend zum Index $\alpha + \alpha'$,

(2) $\frac{1}{f}$ ist regulär variierend zum Index $-\alpha$,

(3) ist $p \in \mathbb{R}$, so ist f^p regulär variierend zum Index $p\alpha$,

Beweis. (1) Nach Voraussetzung gibt es langsam variierende Funktionen L, L', so dass $f(x) = x^{-\alpha}L(x)$ und $f'(x) = x^{-\alpha'}L'(x)$, also

$$f(x) \cdot f'(x) = x^{-\alpha+\alpha'}L(x) \cdot L'(x)$$

und $\frac{L(ax)L'(ax)}{L(x)L'(x)} \longrightarrow 1$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$.

(2) $\frac{1}{f(x)} = x^{\alpha}\big(L(x)\big)^{-1}$ und $\frac{L(ax)^{-1}}{L(x)^{-1}} = \left(\frac{L(ax)}{L(x)}\right)^{-1} \longrightarrow 1$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$.

(3) $f(x)^p = x^{-p\alpha}\big(L(x)\big)^p$ und $\frac{L(ax)^p}{L(x)^p} = \left(\frac{L(ax)}{L(x)}\right)^p \longrightarrow 1^p = 1$. □

3.1.4 Lemma *Ist X eine reelle, regulär zum Index α variierende Zufallsvariable und $p > 0$, so ist X^p regulär variierend zum Index $\frac{\alpha}{p}$.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine langsam variierende Funktion $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, so dass $P(|X| > x) = x^{-\alpha}L(x)$ ist. Es gilt demnach

$$P(|X^p| > x) = P(|X| > x^{1/p}) = x^{-\alpha/p}L(x^{1/p}),$$

wobei $L(x^{1/p})$ ebenfalls langsam variiert. □

3.1.5 Definition (verallgemeinerte Inverse) Sei $U : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ eine monoton wachsende Abbildung (etwa eine Verteilungsfunktion). Dann heißt die Abbildung

$$U^{\leftarrow} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ y \longmapsto \inf\big\{x \in \mathbb{R} \big| U(x) \geq y\big\}$$

die **verallgemeinerte (linksstetige) Inverse** von U.

3.1.6 Bezeichnung Für eine $\mathbb{R}$- bzw. $\acute{\mathbb{R}}$-wertige, zum Index α regulär variierende Abbildung X setzen wir

$$a_n := \inf\big\{x \in \mathbb{R} \;\big|\; P[|X| > x] \leq n^{-1}\big\}.$$

3.1.7 Bemerkung Beachte, dass a_n monoton wachsend ist und damit nach Definition der regulären Variation $a_n \nearrow \infty$ gilt, denn sonst wäre $P[|X| > a] = 0$ für $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, was einen Widerspruch zu Bedingung *(1)* (Def. 3.1.1) darstellen würde. Weiterhin gilt für die Abbildung $1/P[|X| > \bullet] : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1],\ x \longmapsto 1/P[|X| > x]$ offenbar

$$a_n = \big(1/P[|X| > \bullet]\big)^{\leftarrow}(n).$$

3.1.8 Satz *Für eine $\mathbb{R}$- bzw. $\acute{\mathbb{R}}$-wertige, zum Index α regulär variierende Abbildung X gelten folgende Konvergenzen:*

(1) $nP(a_n^{-1}|X| > x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^{-\alpha}$

(2) $nP(a_n^{-1}X > x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} px^{-\alpha}$

(3) $nP(a_n^{-1}X \leq -x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} qx^{-\alpha}$.

Für den Beweis des Satzes benötigen wir zunächst folgendes Lemma:

3.1.9 Lemma *Ist $U : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ eine monoton wachsende Funktion und $U^{\leftarrow}$ die verallgemeinerte Inverse von U, so gilt für alle $z \in \mathbb{R}$ und $y \in [0,1]$:*

(1) $z < U^{\leftarrow}(y) \;\Rightarrow\; U(z) < y$,

(2) $z > U^{\leftarrow}(y) \;\Rightarrow\; U(z) \geq y$.

Beweis. (1) $z < U^{\leftarrow}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R}|U(x) \geq y\} \;\Rightarrow\; z \notin \{x \in \mathbb{R}|U(x) \geq y\} \;\Rightarrow\; U(z) < y$,

(2) $z > U^{\leftarrow}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R}|U(x) \geq y\} \overset{mon.}{\Rightarrow} z \in \{x \in \mathbb{R}|U(x) \geq y\} \;\Rightarrow\; U(z) \geq y$. □

Beweis von Satz 3.1.8: *(1)*: Die Abbildung $U := 1/P[|X| > \bullet]$ ist offenbar monoton wachsend, also sind die Voraussetzungen für Lemma 3.1.9 erfüllt. Mit $y = n$ und $z = U^{\leftarrow}(n)(1-\varepsilon)$ bzw. $z = U^{\leftarrow}(n)(1+\varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$ folgt dann:

$$\frac{U(U^{\leftarrow}(n))}{U(U^{\leftarrow}(n)(1+\varepsilon))} \leq \frac{U(U^{\leftarrow}(n))}{n} \leq \frac{U(U^{\leftarrow}(n))}{U(U^{\leftarrow}(n)(1-\varepsilon))}$$

Weiter gilt $U^{\leftarrow}(n) = a_n$ (siehe Bemerkung 3.1.7). Aus der obigen Ungleichung folgt somit

$$\frac{P[|X| > a_n(1+\varepsilon)]}{P[|X| > a_n]} \leq \big(nP[|X| > a_n]\big)^{-1} \leq \frac{P[|X| > a_n(1-\varepsilon)]}{P[|X| > a_n]}. \qquad (*)$$

Da X von regulärer Variation (zum Index α) ist, gibt es eine langsam variierende Abbildung $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mit

$$\frac{P[|X| > a_n(1+\varepsilon)]}{P[|X| > a_n]} = (1+\varepsilon)^{-\alpha} \frac{L(a_n(1+\varepsilon))}{L(a_n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1+\varepsilon)^{-\alpha}.$$

Wenden wir diese Konvergenz in die Ungleichung $(*)$ an, so erhalten wir:

$$(1-\varepsilon)^{\alpha} \leq \liminf_{n\to\infty} nP[|X| > a_n] \leq \limsup_{n\to\infty} nP[|X| > a_n] \leq (1+\varepsilon)^{\alpha}$$

für alle $\varepsilon > 0$ und demnach

$$\lim_{n\to\infty} nP[|X| > a_n] = 1.$$

Also ist

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} nP[a_n^{-1}|X| > x] &= \lim_{n\to\infty} nP[|X| > a_n x] \cdot \lim_{n\to\infty} \big(nP[|X| > a_n]\big)^{-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{P[|X| > a_n x]}{P[|X| > a_n]} = \lim_{n\to\infty} \frac{L(a_n x)}{L(x)} = x^{-\alpha}.\end{aligned}$$

Die Aussagen *(2)* und *(3)* folgen direkt aus *(1)* und der Bedingung *(2)* aus der Definition einer regulär variierenden Zufallsvariable (Definition 3.1.1 auf Seite 95). □

3.1.10 Satz *$U : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ sei regulär variierend zum Index α. Dann gilt:*

(1) $\lim_{x\to\infty} U(x) = \begin{cases} 0, & \textit{falls } \alpha > 0 \\ \infty, & \textit{falls } \alpha < 0. \end{cases}$

(2) Ist U monoton wachsend, $-\infty \leq \alpha \leq 0$ und $\lim_{x\to\infty} U(x) = \infty$, so ist die verallgemeinerte Inverse $U^{\leftarrow}$ von U regulär variierend zum Index $-\alpha$.

(Siehe Proposition 0.8 in [Resnick, 1987] auf S.22 f..)

3.1.11 Lemma *Ist X regulär variierend zum Index $\alpha > 0$ und $p \neq 0$ so gibt es eine monoton wachsende, zum Index $\frac{p}{\alpha}$ regulär variierende Funktion $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ so dass $f(n) = a_n^{-p}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Es sei $\overline{F} := P[|X| > \bullet]$. Nach Bemerkung 3.1.7 auf der vorherigen Seite ist $a_n = \big(1/\overline{F}\big)^{\leftarrow}(n)$. Da $\overline{F}$ regulär variierend zum Index $\alpha > 0$ ist, ist $1/\overline{F}$ gemäß Lemma 3.1.3 auf Seite 96 regulär variierend zum Index $-\alpha$. Laut Teil *(2)* in Satz 3.1.10 ist $\big(1/\overline{F}\big)^{\leftarrow}$ also regulär variierend zum Index $-\alpha^{-1}$ und damit $f := \big(\big(1/\overline{F}\big)^{\leftarrow}\big)^{-p}$ regulär variierend zum Index $\frac{p}{\alpha}$. □

3.1.12 Satz *Es sei X eine $\acute{\mathbb{R}}$-wertige, zum Index α regulär variierende Zufallsvariable und μ das durch die Vorschrift*

$$\mu\big[[-\infty, b]\big] = qb^{-\alpha}\ \forall b \in \mathbb{R}^- \quad \textit{und} \quad \mu\big[(c, \infty]\big] = pc^{-\alpha}\ \forall c \in \mathbb{R}^+$$

eindeutig festgelegte Maß auf $\acute{\mathbb{R}}$. Ist weiterhin

$$\mu_n : \mathfrak{B}(\acute{\mathbb{R}}) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ A \longmapsto nP_{a_n^{-1}X}[A],$$

dann gilt in $M_+(\acute{\mathbb{R}})$ die vage Konvergenz

$$\mu_n \overset{v}{\longrightarrow} \mu.$$

Beweis. Zur Eindeutigkeit des Maßes: Die angegebene Vorschrift legt μ auf dem Semiring

$$\mathcal{C} := \left\{(b,c] \;\middle|\; -\infty \leq b \leq c \leq \infty \textit{ und } c < 0 \textit{ oder } 0 < b \right\} \subset \mathfrak{B}(\acute{\mathbb{R}})$$

fest. Die Mengenfunktion μ ist additiv, σ-subadditiv und σ-endlich auf dem Semiring $\mathcal{C}$. Somit gilt nach Satz 2.1.6 auf Seite 41 und Bemerkung 1.3.11 auf Seite 38, dass μ eindeutig zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{C}) = \mathfrak{B}(\acute{\mathbb{R}})$ fortgesetzt werden kann.

Zur Konvergenz: Gemäß Beispiel 2.3.9 auf Seite 64 (mit $h = 1$) ist $\mathcal{C}$ ein DC-Semiring auf $\acute{\mathbb{R}}$. Laut Theorem 2.4.1 auf Seite 66 ist die vage Konvergenz $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ äquivalent zur punktweisen Konvergenz

$$\mu_n[C] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu[C]$$

für alle $C \in \mathcal{C}$. Sei also $C \in \mathcal{C}$. Dann ist $C = (b,c]$ für geeignete $b < c$ mit $c < 0$ oder $0 < b$. Wir behandeln nur den Fall $0 < b < c$:

$$\begin{aligned}\mu_n[C] &= nP_{a_n^{-1}X}\big[(b,\infty)\backslash(c,\infty)\big] = nP\big[a_n^{-1}X > b\big] - nP\big[a_n^{-1}X > c\big] \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} pb^{-\alpha} - pc^{-\alpha} = \mu\big[(b,\infty]\big] - \mu\big[(c,\infty]\big] = \mu\big[C\big].\end{aligned}$$

Analog zeigt man diese Konvergenz für $C = (b,c]$ mit $b < c < 0$. □

Ein populärer Satz der Theorie regulär variierender Zufallsvariablen, ist der Satz von Karamata, den wir (in abgewandelter Form) im Folgenden des Öfteren verwenden werden. In [Resnick, 1987] findet sich der Satz in folgender Form:

3.1.13 Satz ***(Satz von Karamata)*** *Es sei $U : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ regulär variierend zum Index α.*

(1) Ist $\alpha \leq 1$ so gilt:

$$\frac{yU(y)}{\int_0^y U(t)\;dt} \overset{y\to\infty}{\longrightarrow} 1-\alpha.$$

(2) Ist $\alpha > 1$ so ist $\int_y^\infty U(t)\;dt < \infty$ und es gilt:

$$\frac{yU(y)}{\int_y^\infty U(t)\;dt} \overset{y\to\infty}{\longrightarrow} -(1-\alpha).$$

(Siehe [Resnick, 1987] S.17.)

3.1.14 Korollar *Es sei X eine reelle, regulär zum Index α variierende Zufallsvariable.*

(1) Ist $\alpha < 1$ so gilt:

$$\frac{\mathbb{E}(|X|\mathbb{I}_{\{|X|\leq y\}})}{yP[|X| > y]} \overset{y\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

(2) Ist $\alpha > 1$ so ist $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ und es gilt:

$$\frac{\mathbb{E}(|X|\mathbb{I}_{\{|X|>y\}})}{yP[|X| > y]} \overset{y\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

Beweis. Wir setzen $U = P[|X| > \bullet]$. Laut Satz 4.26 auf Seite 100 in [Klenke, 2008] gilt für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ und eine messbare Abbildung $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$ *fast überall*:

$$\int_\Omega f \; d\mu = \int_0^\infty \mu[\{f \geq t\}] \; dt. \qquad (*)$$

(1):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X|\mathbb{I}_{\{|X|\leq y\}}) &= \int_\Omega |X|\mathbb{I}_{\{|X|\leq y\}} \; dP \\
&\overset{(*)}{=} \int_0^\infty P[|X|\mathbb{I}_{\{|X|\leq y\}} > t] \; dt \\
&= \int_0^y P[y \geq |X| > t] \; dt \\
&= \int_0^y P[|X| > t] - P[|X| > y] \; dt \\
&= \int_0^y P[|X| > t] \; dt - yP[|X| > y].
\end{aligned}$$

Wenden wir nun Teil *(1)* Satz 3.1.13 an, so erhalten wir:

$$\frac{yP[|X| > y]}{\mathbb{E}(|X|\mathbb{I}_{\{|X|\leq y\}}) + yP[|X| > y]} \overset{y\to\infty}{\longrightarrow} (1-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbb{E}(|X|\mathbb{I}_{\{|X|\leq y\}})}{yP[|X| > y]} \overset{y\to\infty}{\longrightarrow} (1-\alpha)^{-1} - 1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

(2):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X|\mathbb{I}_{\{|X|> y\}}) &= \int_\Omega |X|\mathbb{I}_{\{|X|> y\}} \; dP \\
&\overset{(*)}{=} \int_0^\infty P[|X|\mathbb{I}_{\{|X|> y\}} > t] \; dt \\
&= \int_0^\infty P[|X| > \max\{t, y\}] \; dt \\
&= \int_0^y P[|X| > y] \; dt + \int_y^\infty P[|X| > t] \; dt \\
&= yP[|X| > y] + \int_y^\infty P[|X| > t] \; dt
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Teil *(2) von Satz 3.1.13 folgt:*

$$\frac{yP[|X|>y]}{\mathbb{E}(|X|\mathbb{I}_{\{|X|>y\}}) - yP[|X|>y]} \overset{y\to\infty}{\longrightarrow} -(1-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathbb{E}(|X|\mathbb{I}_{\{|X|>y\}})}{yP[|X|>y]} \overset{y\to\infty}{\longrightarrow} 1-(1-\alpha)^{-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

Weiterhin gilt gemäß dem Satz von Karamata, dass $\int_y^\infty P[|X|>t]\,dt$ für jedes $y>0$ endlich ist. Somit muss auch $\mathbb{E}(|X|\mathbb{I}_{\{|X|>y\}})$ und damit $\mathbb{E}(|X|) = \mathbb{E}(|X|\mathbb{I}_{\{|X|>y\}}) + \mathbb{E}(|X|\mathbb{I}_{\{|X|\le y\}})$ endlich sein. □

Abschließend machen wir uns mit zwei weiteren klassischen Konvergenzaussagen der Extremwerttheorie bzw. der Theorie regulär variierender Funktionen, vertraut.

3.1.15 Satz *Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig identisch verteilte, reelle Zufallsvariablen von regulärer Variation zum Index α. Dann gilt:*

$$P[a_n^{-1} \max_{1\le k\le n} X_k \le x] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(-x^{-\alpha}).$$

Beweis. der Satz ist eine Variante von Proposition 1.1 auf Seite 54 in [Resnick, 1987]. Dabei nutzt man aus, dass für die Verteilungsfunktion $F := P[X_1 \le \bullet]$ der X_i gilt:

$$P[a_n^{-1} \max_{1\le k\le n} X_k \le x] = P[a_n^{-1} X_k \le x\ \forall k=1,\dots,n] \overset{u.i.v.}{=} \big(P[X_1 \le a_n x]\big)^n = \big(F(a_n x)\big)^n.$$

□

3.1.16 Definition und Satz (α-stabile Verteilung) Ist $\alpha \in (0,2]$ und sind $Y_\alpha, Z_1, Z_2, \dots$ unabhängig identisch verteilte, reelle Zufallsvariablen mit

$$n^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^n Z_i \overset{d}{=} Y_\alpha \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so nennt man Y_α **α-stabil** verteilt. Ist $(Z_n')_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen mit

$$c_n \sum_{i=1}^n Z_i' \overset{d}{=} Z' \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so lässt sich zeigen, dass c_n von der Form $c_n = n^{-\frac{1}{\alpha}}$ für ein geeignetes $\alpha \in (0,2]$ ist.

(Siehe [Feller, 1971] S. 170.)

3.1.17 Bezeichnung (nicht-entartete Verteilungen) Die Verteilung P_Y einer Zufallsvariable Y heißt **entartet**, falls es einen Punkt a im Bild von Y gibt, für den $P_Y[\{a\}] = 1$ ist, anderenfalls heißt P_Y **nicht-entartet**.

3.1.18 Satz *Ist Y_α eine reelle Zufallsvariable mit α-stabiler nicht-entarteter Verteilung, so gilt für alle $\beta \in (0, \alpha)$*

$$\mathbb{E}(|Y_\alpha|^\beta) < \infty.$$

(Siehe [Feller, 1971] S.578.)

3.1.19 Satz *Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig identisch verteilte, reelle Zufallsvariablen von regulärer Variation zum Index α und es sei entweder*

- $\alpha \in (0, 1)$

oder

- $\alpha \in (1, 2)$ *und* $\mathbb{E}(X_1) = 0$.

Ist nun $(\widetilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine relle Zahlenfolge, so dass

$$n\widetilde{a}_n^{-2} \int_{-\widetilde{a}_n}^{\widetilde{a}_n} X^2 \, dP_{X_1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}^+$ gilt, so gibt es eine reelle Zufallsvariable Y_α mit nicht-entarteter α-stabiler Verteilung, so dass

$$\widetilde{a}_n^{-1} S_n \xrightarrow{d} Y_\alpha.$$

Beweis. Der Satz ist in Theorem 3 und Corollary 2 in [Feller, 1971] (S. 580 bzw. 578) enthalten. Man beachte, dass Fellers Definition stabiler Verteilungen bereits enthält, dass diese nicht-entartet sind (vgl. [Feller, 1971] S. 170). □

3.1.20 Korollar *Sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig identisch verteilte, reelle Zufallsvariablen von regulärer Variation zum Index α und entweder*

- $\alpha \in (0, 1)$

oder

- $\alpha \in (1, 2)$ *und* $\mathbb{E}(X_1) = 0$,

so gibt es eine reelle Zufallsvariable Y_α mit nicht-entarteter α-stabiler Verteilung und

$$a_n^{-1} S_n \xrightarrow{d} Y_\alpha.$$

Beweis. Wir zeigen, dass für die a_n die Konvergenz in der Voraussetzung von Satz 3.1.19 gilt:

$$\begin{aligned} na_n^{-2}\int_{-a_n}^{a_n} X_1^2 \; dP_{X_1} &= na_n^{-2}\int_{\mathbb{R}} X_1^2 \mathbb{I}_{\{X^2\le a_n^2\}} \; dP_{X_1} \\ &= na_n^{-2}\mathbb{E}\big(X_1^2\mathbb{I}_{\{X_1^2\le a_n^2\}}\big)\cdot\frac{P(|X_1|^2\ge a_n^2)}{P(|X_1|^2\ge a_n^2)} \\ &= \frac{\mathbb{E}\big(X_1^2\mathbb{I}_{\{X_1^2\le a_n^2\}}\big)}{a_n^2 P(|X_1|\ge a_n^2)}\cdot nP(|X_1|\ge a_n). \end{aligned}$$

Gemäß Lemma 3.1.4 auf Seite 96 ist X_1^2 regulär variierend zum Index $\frac{\alpha}{2} < 1$. Eine Anwendung von Korollar 3.1.14 auf Seite 99 liefert somit

$$\frac{\mathbb{E}\big(X_1^2\mathbb{I}_{\{X_1^2\le a_n^2\}}\big)}{a_n^2 P(|X_1|\ge a_n^2)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{2-\alpha}.$$

Auf der anderen Seite gilt nach Lemma 3.1.8 auf Seite 97

$$nP(|X_1|\ge a_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Zusammenfassend erhalten wir also:

$$na_n^{-2}\int_{-a_n}^{a_n} X_1^2 \; dP_{X_1} = \frac{\mathbb{E}\big(X_1^2\mathbb{I}_{\{X_1^2\le a_n^2\}}\big)}{a_n^2 P(|X_1|\ge a_n^2)}\cdot nP(|X_1|\ge a_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{2-\alpha}.$$

□

3.2 Vorbereitung

Ziel dieses Abschnittes ist die Berechnung des asymptotischen Verhaltens, des Punktprozesses

$$N_n := \sum_{k=1}^{n} \delta_{a_n^{-1}(X_k, X_k+X_{k+1}, \ldots, X_k+, \ldots, +X_{k+h-1})},$$

wobei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wieder die Normierungsfolge

$$a_n := \inf\big\{x \in \mathbb{R} \;\big|\; P[|X_1| > x] \leq n^{-1}\big\}$$

bezeichnet. Dieser wird, wie in der Einleitung beschrieben, die Berechnung des Grenzverteilung der Statistik

$$a_n^{-1} \max_{1\leq l\leq n} \max_{0\leq k\leq n-l} \left|\frac{S_{k+l}-S_k}{l^\gamma}\right|$$

aus dem Satz von Mikosch und Račkauskas ermöglichen. Die Grenzverteilung von N_n leiten wir nun sukzessive aus den Sätzen 3.1.12 auf Seite 98 und 3.1.12 auf Seite 98 her:

3.2.1 Korollar *Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig identisch verteilter, $\acute{\mathbb{R}}$-wertiger, zum Index α regulär variierender Zufallsvariablen. Dann gilt in $\mathfrak{L}(M_+(\acute{\mathbb{R}}))$ die Konvergenz*

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{a_n^{-1}X_k} \xrightarrow{d} \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{J_k},$$

wobei die J_k die Punkte eines Poisson'schen Punkprozesses auf $\acute{\mathbb{R}}$ zum Intensitätsmaß μ mit

$$\mu\big[(x,\infty]\big] = px \quad \textit{und} \quad \mu\big[[\infty,-x]\big] = qx \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

sind.

Beweis. Der Satz ist ein einfaches Korollar aus Satz 3.1.12 auf Seite 98 und Satz 2.8.15 auf Seite 94. □

Nun folgt der aufwändigste Teil dieses Abschnittes: Die Verallgemeinerung von Korollar 3.2.1 in eine h-dimensionale Variante:

3.2.2 Satz *Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig identisch verteilter, $\acute{\mathbb{R}}$-wertiger, zum Index α regulär variierender Zufallsvariablen auf $\mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{e}_j$ den Punkt*

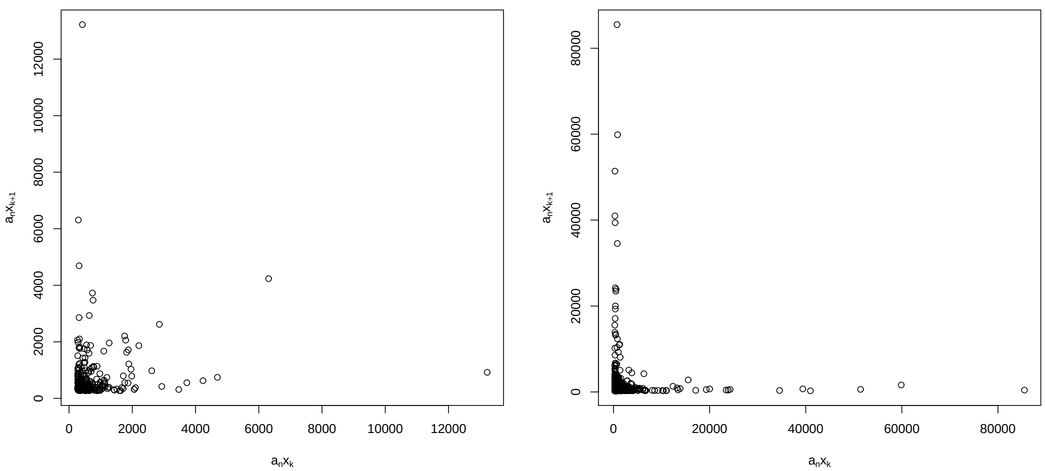
$$\boldsymbol{e}_j = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{'te Stelle}}}{1}, 0, \ldots, 0).$$

Es gilt für alle $h \geq 1$ in $\mathfrak{L}(M_+(\acute{\mathbb{R}}^h))$

$$\widehat{N}_n := \sum_{k=1}^{n} \delta_{a_n^{-1}(X_k,\ldots,X_{k+h-1})} \xrightarrow{d} \widehat{N} := \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h} \delta_{J_k \boldsymbol{e}_i},$$

wobei die J_i und μ wie in Korollar 3.2.1 sind.

Abbildung 4: Realisierungen der „Massepunkte“ von $\widehat{N}_n$, wobei die $X_i \sim Par(1{,}4;1)$ sind. Links für $n = 250$ und rechts für $n = 2.500$. Man beachte, wie sich die Punkte an die Achsen anschmiegen.



Beweis. Wir setzen

$$I_n := \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{h} \delta_{a_n^{-1} X_k \mathbf{e}_i}.$$

I_n hat wie $\widehat{N}$ nur „Masse“ auf den Achsen $\acute{\mathbb{R}}\mathbf{e}_i,\ i = 1, \ldots, h$. Wir werden zuerst $I_n \xrightarrow{d} \widehat{N}$ zeigen und dann einen Zusammenhang zwischen I_n und $\widehat{N}_n$ herstellen, der es uns erlaubt, aus dem Grenzverhalten in Verteilung von I_n auf das von $\widehat{N}_n$ zu schließen.

Behauptung. $I_n \xrightarrow{d} \widehat{N}$.

Beweis. Es sei

$$\tau_i : \acute{\mathbb{R}} \longrightarrow \acute{\mathbb{R}}^h, \begin{cases} x & \longmapsto x\mathbf{e}_i \quad \textit{falls } x \neq p_\infty \\ p_\infty & \longmapsto p_\infty \end{cases}.$$

Betrachte die folgende Verkettung von Abbildungen:

$$\begin{array}{lclcl} M_+(\acute{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\varphi_1} & (M_+(\acute{\mathbb{R}}^h))^h & \xrightarrow{\varphi_2} & M_+(\acute{\mathbb{R}}^h) \\ \mu & \longmapsto & (\mu \circ \tau_1^{-1}, \ldots, \mu \circ \tau_h^{-1}) & \longmapsto & \sum_{i=1}^h \mu \circ \tau_i^{-1}. \end{array}$$

Für Maße $\mu_1, \ldots, \mu_h$ bezeichnen wir dabei mit $\sum_{i=1}^h \mu_i$ das Maß mit

$$(\sum_{i=1}^{h} \mu_i)[A] := \sum_{i=1}^{h} (\mu_i[A])$$

für alle messbaren Mengen A. Wir wollen nun wieder den Satz von der stetigen Abbildung (Satz 2.1.26 auf Seite 47) anwenden. Dazu überprüfen wir zunächst die Voraussetzungen:

Behauptung. $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ ist stetig.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass φ_1 stetig ist. Wir weisen diese Stetigkeit komponentenweise für die Abbildungen $\mu \longmapsto \mu \circ \tau_i^{-1}$, $i = 1, \ldots, h$ nach. Sei hierzu $K \in \acute{\mathbb{R}}^h$ kompakt. Es folgt, dass dann auch $K \cap \acute{\mathbb{R}}\mathbf{e}_i$ kompakt ist, denn $\acute{\mathbb{R}}\mathbf{e}_i$ ist abgeschlossen in $\acute{\mathbb{R}}^h$. Die Abbildung

$$\acute{\pi}_i : \acute{\mathbb{R}}^h \longrightarrow \acute{\mathbb{R}},\ x \longmapsto \begin{cases} x_i, & \textit{falls } x = (x_1, \ldots, x_h) \neq p_\infty \\ p_\infty, & \textit{falls } x = p_\infty \end{cases}$$

bildet relativ kompakte Mengen auf relativ kompakte Mengen ab (vgl. 1.3.6 auf Seite 36). Also ist

$$\tau_i^{-1}(K) = \tau_i^{-1}(K \cap \acute{\mathbb{R}}\mathbf{e}_i) = \acute{\pi}_i(K \cap \acute{\mathbb{R}}\mathbf{e}_i)$$

relativ kompakt für alle $i = 1, \ldots, h$. Wir können nun Satz 2.2.13 auf Seite 60 anwenden und erhalten somit die (komponentenweise) Stetigkeit von φ_1. Bleibt noch die Stetigkeit von

$$\varphi_2 : (M_+(\acute{\mathbb{R}}^h))^h \longrightarrow M_+(\acute{\mathbb{R}}^h),\ (\mu_1, \ldots, \mu_h) \longmapsto \sum_{i=1}^h \mu_i$$

zu zeigen. Diese zeigen wir, indem wir äquivalent Folgenstetigkeit nachweisen. Es sei hierzu

$$\mu^{(n)} := \left(\mu_1^{(n)}, \ldots, \mu_h^{(n)}\right) \xrightarrow{v} \left(\mu_1, \ldots, \mu_h\right) =: \mu.$$

Wir müssen zeigen, dass $\varphi_2(\mu^{(n)}) \xrightarrow{v} \varphi_2(\mu)$ gilt, dass also

$$\int_{\acute{\mathbb{R}}^h} f \ d\sum_{i=1}^h \mu_i^{(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\acute{\mathbb{R}}^h} f \ d\sum_{i=1}^h \mu_i$$

für alle $f \in C_K^+(\acute{\mathbb{R}}^h)$. Aus $\mu^{(n)} \xrightarrow{v} \mu$ folgt sofort $\mu_i^{(n)} \xrightarrow{v} \mu_i$ für alle $i = 1, \ldots, h$ und somit

$$\int_{\acute{\mathbb{R}}^h} f \ d\mu_i^{(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\acute{\mathbb{R}}^h} f \ d\mu_i.$$

Also sehen wir

$$\int_{\acute{\mathbb{R}}^h} f \ d\sum_{i=1}^h \mu_i^{(n)} = \sum_{i=1}^h \int_{\acute{\mathbb{R}}^h} f \ d\mu_i^{(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^h \int_{\acute{\mathbb{R}}^h} f \ d\mu_i = \int_{\acute{\mathbb{R}}^h} f \ d\sum_{i=1}^h \mu_i.$$

Damit ist die Stetigkeit von φ_2 bewiesen. □

Wie wirkt nun $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ auf einen Punktprozess? Betrachte einen Punktprozess mit Darstellung wie in Lemma 2.8.8 auf Seite 86. Da $\delta_{Y_i} \circ f^{-1} = \delta_{f(Y_i)}$, liefert Einsetzen in die Abbildungsvorschriften:

$$\sum_{k=1}^M \delta_{Y_k} \overset{\varphi_1}{\longmapsto} \left(\sum_{k=1}^M \delta_{Y_k \mathbf{e}_1}, \ldots, \sum_{k=1}^M \delta_{Y_k \mathbf{e}_h}\right) \overset{\varphi_2}{\longmapsto} \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^h \delta_{Y_k \mathbf{e}_i},$$

d.h. $\varphi\big(\sum_{k=1}^{n}\delta_{a_n^{-1}X_k}\big) = I_n$ und $\varphi\big(\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{J_k}\big) = \widehat{N}$. Gemäß Korollar 3.2.1 auf Seite 104 gilt $\sum_{k=1}^{n}\delta_{a_n^{-1}X_k} \xrightarrow{d} \sum_{k=1}^{\infty}\delta_{J_k}$. Mit Hilfe des Satzes von der stetigen Abbildung (Satz 2.1.26 auf S. 47) gilt also

$$I_n = \varphi\Big(\sum_{k=1}^{n}\delta_{a_n^{-1}X_k}\Big) \xrightarrow{d} \varphi\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{J_k}\Big) = \widehat{N}.$$

□

Den Zusammenhang von I_n und $\widehat{N}_n$ klärt das folgende Lemma:

3.2.3 Lemma *Sei wieder $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. reelle zum Index α regulär variierende Zufallsvariablen, $\widehat{N}_n$ wie in Korollar 3.2.1 (S. 104), $I_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{h}\delta_{a_n^{-1}X_k\boldsymbol{e}_i}$ sowie*

$$\mathcal{C} := \Big\{\prod_{i=1}^{h}(b_i, c_i] \;\Big|\; -\infty \le b_i \le c_i \le \infty \text{ und } \exists i_0 = 1,\ldots,h:\ c_{i_0} < 0 \text{ oder } 0 < b_{i_0}\Big\} \subset \mathfrak{B}(\acute{\mathbb{R}}^h)$$

Dann gilt:

(1) $\mathcal{C}$ ist ein DC-Semiring mit $\widehat{N}[\partial C] = 0$ fast sicher für alle $C \in \mathcal{C}$.

(2) $\big(\widehat{N}_n[C] - I_n[C]\big) \xrightarrow{P} 0 \quad \forall C \in \mathcal{C}$.

Aus diesem Lemma folgt sofort

$$\sum_{i=1}^{k} t_i(\widehat{N}_n[C_i] - I_n[C_i]) \xrightarrow{P} 0 \;\; \textit{für alle } i = 1,\ldots,k,\; t_i \in \mathbb{R}.$$

Wir erinnern uns, dass $I_n \xrightarrow{d} \widehat{N}$ gilt. Wenden wir nun Korollar 2.1.23 auf Seite 46 an, so folgt für alle $k \in \mathbb{N}$, $t = (t_1,\ldots,t_k) \in \mathbb{R}^k$:

$$\sum_{i=1}^{k} t_i\widehat{N}_n[C_i] = \sum_{i=1}^{k} t_i I_n[C_i] + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} t_i(\widehat{N}_n[C_i] - I_n[C_i])}_{\xrightarrow{P}0} \xrightarrow{d} d\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k} t_i I_n[C_i] \overset{2.1.24}{=} \sum_{i=1}^{k} t_i\widehat{N}[C_i].$$

Dies ist nach Theorem 2.7.4 auf Seite 82 hinreichend für $\widehat{N}_n \xrightarrow{d} \widehat{N}$. □

Beweis von Lemma 3.2.3: Man überlege sich zunächst, dass für ein $C = \prod_{i=1}^{h}(b_i, c_i] \in \mathcal{C}$ höchstens ein Schnitt mit einer Koordinatenachse $\acute{\mathbb{R}}\mathbf{e}_i, i = 1,\ldots,h$ nicht leer ist.

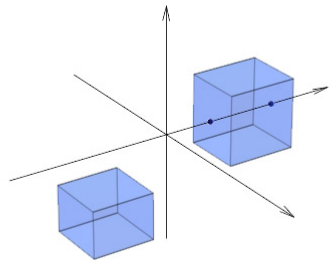


Abbildung 5: Mengen aus $\mathcal{C}$ in $\acute{\mathbb{R}}^3$. Man beachte, dass der Achsenschnittpunkt kein Element von $\acute{\mathbb{R}}^3$ ist.

BEHAUPTUNG. Für $C \in \mathcal{C}$ gilt entweder

(a) $\overline{C} \cap \acute{\mathbb{R}}\mathbf{e}_i = \emptyset$ *für alle* $i = 1, \ldots, h$, oder

(b) es gibt ein $i_0 \in \{1, \ldots, h\}$ mit

$$\overline{C} \cap \acute{\mathbb{R}}\mathbf{e}_i = \begin{cases} \{0\} \times \ldots \times \{0\} \times \underset{i_0\text{'te Stelle}}{\underset{\uparrow}{\overline{(b_{i_0}, c_{i_0}]}}} \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}, & \text{für } i = i_0 \\ \emptyset, & \text{für alle } i \neq i_0. \end{cases}$$

BEWEIS. Im Fall $h = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei also $h \geq 2$: Nehmen wir an, $\overline{C} \cap \acute{\mathbb{R}}\mathbf{e}_j$ und $\overline{C} \cap \acute{\mathbb{R}}\mathbf{e}_k$ seien ungleich $\emptyset$. In diesem Fall gibt es reelle Zahlen $x, y \neq 0$ mit $x\mathbf{e}_j, y\mathbf{e}_k \in \overline{C}$. Dann folgt aus $x\mathbf{e}_j \in \overline{C}$, dass $0 \in \overline{(b_i, c_i]}$ für alle $i \neq j$, und aus $y\mathbf{e}_k \in \overline{C}$, dass $0 \in \overline{(b_i, c_i]}$ für alle $i \neq k$. Da $C \in \mathcal{C}$, gibt es aber ein $i_0 \in \{1, \ldots, h\}$ mit $c_{i_0} < 0$ oder $0 < b_{i_0}$ und somit $0 \notin \overline{(b_{i_0}, c_{i_0}]}$. Daher muss $j = k = i_0$ sein. □

Beachte, dass $\widehat{N}$ und I_n $(n = 1, \ldots, h)$ nur „Masse" auf den Achsen $\acute{\mathbb{R}}\mathbf{e}_i$ haben, dass also für

$$\mathbf{A} := \bigcup_{i=1}^{h} \acute{\mathbb{R}}\mathbf{e}_i$$

$\widehat{N}(\mathbf{A}^c) = I_n(\mathbf{A}^c) = 0$ ist. Es gilt somit für alle $B \in \mathfrak{B}(\acute{\mathbb{R}}^h)$, dass $\widehat{N}(B \cap \mathbf{A}) = \widehat{N}(B)$ und $I_n(B \cap \mathbf{A}) = I_n(B)$ ist.

Wir weisen zunächst 3.2.3 *(1)* nach. Nach Beispiel 2.3.9 auf Seite 64 ist $\mathcal{C}$ ein DC-Semiring. Wir brauchen also nur noch $\widehat{N}[\partial C] = 0$ fast sicher für alle $C \in \mathcal{C}$ zu zeigen:

Für $C \in \mathcal{C}$ ist im Fall (a) $C \cap \mathbf{A} = \emptyset$ und im Fall (b) $C \cap \mathbf{A} = \{0\} \times \ldots \times \{0\} \times (b_{i_0}, c_{i_0}] \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}$ für ein geeignetes $i_0 \in \{1, \ldots, h\}$. Unter Voraussetzung (a) ist also

$$\widehat{N}(\partial C) = \widehat{N}(\partial C \cap \mathbf{A}^c) = 0.$$

Gilt Voraussetzung (b), so ist

$$\begin{aligned}
\widehat{N}[\partial C] &= \widehat{N}[\partial C \cap \mathbf{A}^c] = \widehat{N}\left[\{0\} \times \ldots \times \{0\} \times \{b_{i_0}, c_{i_0}\} \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{h} \underbrace{\delta_{J_k \mathbf{e}_i}\left[\{0\} \times \ldots \times \{0\} \times \{b_{i_0}, c_{i_0}\} \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}\right]}_{=0 \textit{ für alle } i \neq i_0, \textit{ da } J_k \in \acute{\mathbb{R}}^h \not\ni 0.} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{J_k}[\{b_{i_0}, c_{i_0}\}] = PPP_\mu[\{b_{i_0}, c_{i_0}\}] \\
&\overset{\textit{Def. 2.8.10}}{=} 0 \quad \textit{fast sicher.}
\end{aligned}$$

Damit ist *(1)* bewiesen.

Zu 3.2.3 *(2)*: Es ist zu zeigen, dass $(\widehat{N}_n[C] - I_n[C]) \xrightarrow{P} 0$ *(dem Maße nach)* $\forall C \in \mathcal{C}$. Im Fall (a) gilt

$$I_n[C] = I_n[C \cap \mathbf{A}] = I_n[\emptyset] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aufgrund von Eigenschaft (a) gilt für $m := \min_{i=1,\ldots,h}\{|b_i|, |c_i|\} > 0$

$$\big([-\infty, -m) \cup (m, \infty]\big)^h \supset \prod_{i=1}^{h} (b_i, c_i] = C.$$

Und somit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\widehat{N}_n[C]\big) &\leq \mathbb{E}\Big(\widehat{N}_n\big[\big([-\infty, -m) \cup (m, \infty]\big)^h\big]\Big) = \sum_{k=1}^{n} P\big[a_n^{-1}|X_{k+i-1}| > m;\ i = 1, \ldots, h\big] \\
&\overset{u.i.v.}{=} nP\big[a_n^{-1}|X_i| > m;\ i = 1, \ldots, h\big] \overset{u.i.v.}{=} n\Big(P\big[a_n^{-1}|X_1| > m\big]\Big)^h \\
&= \underbrace{nP\big[a_n^{-1}|X_1| > m\big]}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} m^{-\alpha} \quad \textit{nach 3.1.8}} \Big(\underbrace{P\big[a_n^{-1}|X_1| > m\big]}_{\in \mathcal{O}(n^{-1}) \ \textit{(3.1.8)}}\Big)^{h-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Also konvergiert $\widehat{N}_n$ im Mittel gegen 0. Da Konvergenz im Mittel Konvergenz dem Maße nach impliziert, folgt nun

$$\widehat{N}_n[C] \xrightarrow{P} 0 \equiv I_n[C].$$

Betrachten wir Fall (b): Sei hierzu $C = \prod_{i=1}^{h}(b_i, c_i]$ und $i_0 \in \{1, \ldots, h\}$ derart gewählt, dass

$$0 \in (b_i, c_i] \iff i \neq i_0.$$

$$
\begin{aligned}
I_n[C] &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{h} \delta_{a_n^{-1}X_k\mathbf{e}_i}[C] \overset{0\notin(b_{i_0},c_{i_0}]}{=} \sum_{k=1}^{n} \delta_{a_n^{-1}X_k\mathbf{e}_{i_0}}[C] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \delta_{a_n^{-1}X_k\mathbf{e}_{i_0}}[(b_1,c_1]\times\ldots\times(b_{i_0},c_{i_0}]\times\ldots\times(b_h,c_h]] \overset{\substack{0\in(b_i,c_i]\\ \forall i\neq i_0}}{=} \sum_{k=i_1}^{n} \delta_{a_n^{-1}X_k}(b_{i_0},c_{i_0}] \\
&\geq \sum_{k=i_0}^{n} \delta_{a_n^{-1}X_k}\big[(b_{i_0},c_{i_0}]\big] = \sum_{k=1}^{n-i_0+1} \delta_{a_n^{-1}X_{k+i_0-1}}\big[(b_{i_0},c_{i_0}]\big] \\
&\geq \sum_{k=1}^{n-i_0+1} \delta_{a_n^{-1}(X_k,\ldots,\underset{\substack{\uparrow\\ i_0\text{'te Stelle}}}{X_{k+i_0-1}},\ldots,X_{k+h-1})}[(b_1,c_1]\times\ldots\times\underset{\substack{\uparrow\\ i_0\text{'te Stelle}}}{(b_{i_0},c_{i_0}]}\times\ldots\times(b_h,c_h]] \\
&= \widehat{N}_n[C] - \underbrace{\sum_{k=n-i_0+2}^{n} \delta_{a_n^{-1}(X_k,\ldots,X_{k+h-1})}[C]}_{=:Rest_n[C]} \geq 0
\end{aligned}
$$

und somit:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\big|I_n[C]-\widehat{N}_n[C]\big|\Big) &= \mathbb{E}\Big(\big|I_n[C]-\widehat{N}_n[C]-Rest_n[C]+Rest_n[C]\big|\Big) \\
&\leq \mathbb{E}\Bigg(\Big|\underbrace{I_n[C]-\big(\widehat{N}_n[C]-Rest_n[C]\big)}_{\geq 0 \text{ siehe oben}}\Big|\Bigg) + \mathbb{E}\Bigg(\Big|Rest_n[C]\Big|\Bigg) \\
&= \mathbb{E}\big(I_n[C]\big) - \mathbb{E}\big(\widehat{N}_n[C]-Rest_n[C]\big) + \mathbb{E}\big(Rest_n[C]\big) \\
&= \mathbb{E}\big(I_n[C]\big) - \mathbb{E}\big(\widehat{N}_n[C]\big) + 2\mathbb{E}\big(Rest_n[C]\big).
\end{aligned}
$$

Betrachten wir diese Erwartungswerte einzeln:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(Rest_n[C]\big) &= \sum_{k=n-i_0+2}^{n} P\big[a_n^{-1}(X_k,\ldots,X_{k+h-1})\in C\big] \\
&\overset{u.i.v.}{=} (i_0-1)P\big[a_n^{-1}(X_1,\ldots,X_h)\in C\big] \\
&\leq (i_0-1)\underbrace{P\big[a_n^{-1}X_{i_0}\in(b_{i_0},c_{i_0}]\big]}_{\in\mathcal{O}(n^{-1}) \text{ nach 3.1.8}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(I_n[C]\big) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{h} P\big[a_n^{-1}X_k\mathbf{e}_i\in C\big] \overset{0\notin(c_{i_0},b_{i_0}]}{=} \sum_{k=1}^{n} P\big[a_n^{-1}X_k\mathbf{e}_{i_0}\in C\big] \\
&= \sum_{k=1}^{n} P\big[a_n^{-1}X_k(b_{i_0},c_{i_0}]\big] \overset{u.i.v.}{=} n\Big(P\big[a_n^{-1}X_1>b_{i_0}]\big] - P\big[a_n^{-1}X_1>c_{i_0}]\big]\Big) \\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu[(b_{i_0},c_{i_0}]] \quad \text{nach Satz 3.1.8.}
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{E}\big(\widehat{N}_n[C]\big) = \sum_{k=1}^{n} P\big[a_n^{-1}(X_k,\dots,X_{k+h-1}) \in C\big] \overset{u.i.v.}{=} \sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{h} P\big[a_n^{-1}X_1 \in \ (b_i,c_i]\big]$$
$$= nP\big[a_n^{-1}X_1 \in \ (b_{i_0},c_{i_0}]\big] \cdot \prod_{1\le i\le h,\ i\neq i_0} P\big[a_n^{-1}X_1 \in \ (b_i,c_i]\big] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu[(b_{i_0},c_{i_0}]].$$

Beim letzten Grenzwert nutzen wir aus, dass $0 \notin (b_i,c_i]$ ist für alle $i \neq i_0$ und somit (wieder gemäß Satz 3.1.8)

$$P\big(a_n^{-1}X_1 \in (b_i,c_i]\big) = 1 - \underbrace{P\big(a_n^{-1}X_1 \le b_i\big)}_{\in\mathcal{O}(n^{-1})} - \underbrace{P\big(a_n^{-1}X_1 >, c_i\big)}_{\in\mathcal{O}(n^{-1})} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

gilt. Das Produkt auf der rechten Seite konvergiert damit gegen $1^h = 1$. Zusammenfassend ergibt sich $\mathbb{E}\big(|I_n[C] - \widehat{N}_n[C]|\big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,d.h.

$$I_n[C] - \widehat{N}_n[C] \overset{L^1}{\longrightarrow} 0.$$

Da Konvergenz dem Maße nach Konvergenz in Verteilung impliziert ist somit Lemma 3.2.3 bewiesen. □

3.2.4 Korollar *Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig identisch verteilte, $\acute{\mathbb{R}}$-wertige, zum Index α regulär variierende Zufallsvariablen. Mit der Bezeichung*

$$\boldsymbol{s}_i := \sum_{j=i}^{h} \boldsymbol{e}_j = (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ j\text{'te Stelle}}}{1},\dots,1).$$

gilt für alle $h \ge 1$ in $\mathfrak{L}(M_+(\acute{\mathbb{R}}^h))$ die Konvergenz

$$N_n := \sum_{k=1}^{n} \delta_{a_n^{-1}(X_k,\, X_k+X_{t+1}\,,\dots,\, X_k+\dots+X_{k+h-1})} \overset{d}{\longrightarrow} N := \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h} \delta_{J_k \boldsymbol{s}_i}.$$

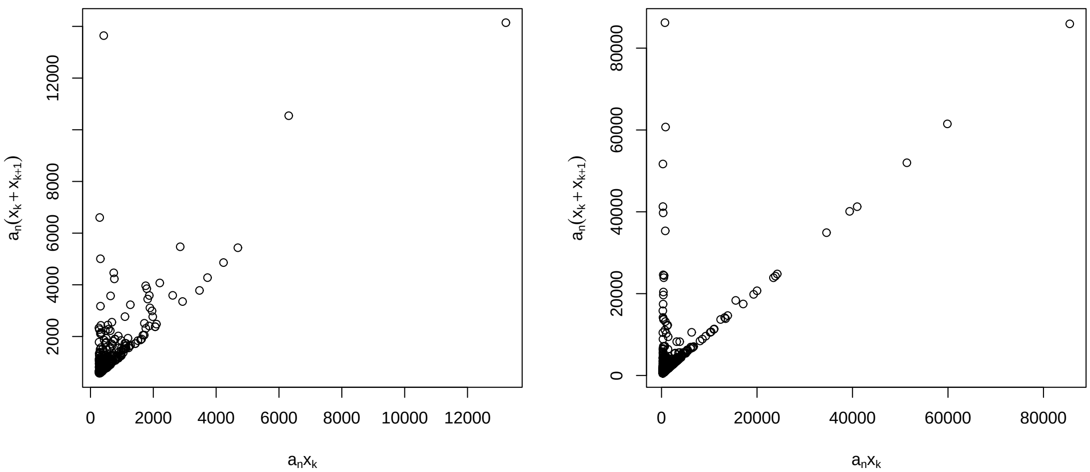
Hierbei sind die J_i die Punkte eines Poisson'schen Punktprozesses auf $\acute{\mathbb{R}}$. Das Intensitätsmaß dieses Punktprozesses ist das Maß μ mit

$$\mu\big[(x,\infty)\big] = px \quad \textit{und} \quad \mu\big[(\infty,-x]\big] = qx \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Beweis. Im Fall $h = 1$ ist dies genau die Aussage von Korollar 3.2.1 auf Seite 104. Wir können also im Folgenden annehmen, dass $h \ge 2$ ist. Wir wenden den Satz von der stetigen Abbildung (Satz 2.1.26 auf Seite 47) auf Satz 3.2.2 auf Seite 104 an. Hierzu definieren wir uns zunächst den Homöomorphismus

$$f : \acute{\mathbb{R}}^h \longrightarrow \acute{\mathbb{R}}^h, x \longmapsto \begin{cases} (x_1, x_1+x_2,\dots,x_1+\dots+x_h), & \textit{falls } x = (x_1,\dots,x_h) \neq p_\infty \\ p_\infty, & \textit{falls } x = p_\infty. \end{cases}$$

Abbildung 6: Realisierungen der „Massepunkte“ von N_n, wobei die wieder $X_i \sim Par(1{,}4; 1)$ ist. Die Realisierung geht auf den gleichen Datensatz wie Abbildung 4 zurück. Links für $n = 250$ und rechts für $n = 2.500$.



Wir setzen nun in Satz 2.1.26 $E_1 = E_2 = M_+(\acute{\mathbb{R}}^h)$, $\xi_n = \widehat{N}_n$ und $\xi = \widehat{N}$, sowie

$$\varphi : M_+(\acute{\mathbb{R}}^h) \longrightarrow M_+(\acute{\mathbb{R}}^h), \mu \longmapsto \mu \circ f^{-1}.$$

Da $M_+(\mathbb{R}^h)$ metrisierbar und φ stetig ist (vergleiche Satz 2.2.13 auf Seite 60), sind die notwendigen Voraussetzungen erfüllt und somit:

$$\varphi(\widehat{N}_n) = \sum_{t=1}^{n} \delta_{a_n^{-1}(X_t,\ldots,X_{t+h-1})} \circ f^{-1} \xrightarrow{d} \varphi(\widehat{N}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{h} \delta_{J_k e_i} \circ f^{-1}.$$

Da für eine reelle Zufallsvariable Y gilt, dass $\delta_Y \circ f^{-1} = \delta_{f(Y)}$ ist, erhalten wir sofort, dass $\varphi_{\widehat{N}_n} = N_n$ und $\varphi_{\widehat{N}_n} = N_n$ ist und demnach

$$N_n \xrightarrow{d} N.$$

$\square$

3.3 Satz und Beweis

3.3.1 Theorem ***(Satz von Mikosch und Račkauskas)*** *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller, unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen von regulärer Variation zum Index $\alpha > 0$. Es seien weiterhin*

$$S_k := \sum_{i=1}^{k} X_i \quad \textit{und} \quad \overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

sowie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Normierungsfolge

$$a_n := \inf\bigl\{x \in \mathbb{R} \bigm| P[|X_1| > x] \leq n^{-1}\bigr\}.$$

Ist entweder

- $\alpha \in (0,1)$ *und* $\gamma > 0$,
- $\alpha \in (1,\infty)\backslash\{2\}$, $\gamma > \max\bigl\{0, \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\bigr\}$ *und* $\mathbb{E}(X_i) = 0$

oder

- $\alpha = 2$, $\gamma > 0$, $\mathbb{E}(X_i) = 0$ *sowie* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|n^{-\frac{1}{\beta}} S_n|) < \infty$ *für alle* $\beta \in (0,2)$,

so gilt für alle $x > 0$:

(1) $$P\Bigl[a_n^{-1} \max_{1\leq l\leq n} \max_{0\leq k\leq n-l} \Bigl|\frac{S_{k+l} - S_k}{l^\gamma}\Bigr| \leq x\Bigr] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\bigl(-x^{-\alpha}\bigr),$$

(2) $$P\Bigl[a_n^{-1} \max_{1\leq l< n} \max_{0\leq k\leq n-l} \Bigl|\frac{S_{k+l} - S_k - l\overline{X}_n}{(l(1-\frac{l}{n}))^\gamma}\Bigr| \leq x\Bigr] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\bigl(-x^{-\alpha}\bigr).$$

Um diesen Satz beweisen zu können benötigen wir zunächst das folgende Doppel-Lemma. Die Hauptarbeit in diesem Abschnitt wird aus dessen schrittweisem Beweis bestehen.

3.3.2 Lemma *Sei $(X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig identisch verteilter, reeller, zum Index α regulär variierender Zufallsvariablen.*

(1) Es gilt $\forall\gamma \geq 0$ und $\forall h \geq 1$

$$P\Bigl[a_n^{-1} \max_{1\leq l\leq h} \max_{0\leq k\leq n-l} \Bigl|\frac{S_{k+l} - S_k}{l^\gamma}\Bigr| \leq x\Bigr] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\bigl(-x^{-\alpha}\bigr) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

(2) Ist entweder

- $\alpha \in (0,1)$ *und* $\gamma > 0$,
- $\alpha \in (1,\infty)\backslash\{2\}$, $\gamma > \max\bigl\{0, \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\bigr\}$ *und* $\mathbb{E}(X_i) = 0$ *oder*

- $\alpha = 2$, $\gamma > 0$, $\mathbb{E}(X_i) = 0$ *sowie* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|n^{-\frac{1}{\beta}} S_n|) < \infty$ *für alle* $\beta \in (0,2)$,

so gilt:

$$\lim_{h\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\Big[a_n^{-1} \max_{h<l\leq n} \max_{0\leq k\leq n-l} \Big|\frac{S_{k+l} - S_k}{l^\gamma}\Big| > \delta\Big] = 0 \quad \forall \delta \in \mathbb{R}^+.$$

Bevor wir uns an der Beweis machen, betrachten wir die Voraussetzungen des Satzes bzw. Lemmas genauer:

3.3.3 Satz *Für eine Folge unabhängig identisch verteilter, reeller, regulär zum Index* $\alpha > 1$ *variierender Zufallsvariablen* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $\mathbb{E}(X_1) = 0$ *gilt:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|n^{-\frac{1}{\beta}} S_n|) < \infty \quad \begin{cases} \textit{für } \beta = 2, & \textit{falls } \alpha > 2 \\ \forall \beta \in (0,\alpha), & \textit{falls } 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Beweis. Ist $\alpha \in (2,\infty)$ so gilt mit dem Satz von Karamata (Satz 3.1.13 auf S. 99) und Lemma 3.1.4 auf Seite 96, dass Die Varianz $\mathbb{V}(X_1)$ von X_1 endlich ist. Nach Voraussetzung ist $\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X_1) = 0$ und damit

$$\mathbb{E}\big((n^{\frac{1}{2}} S_n)^2\big) = \mathbb{V}(n^{\frac{1}{2}} S_n) = \mathbb{V}(X_1) < \infty.$$

Mit der Cauchy Schwarz'schen Ungleichung (siehe [Dehling & Haupt, 2004] S. 134) erhalten wir demnach für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(n^{\frac{1}{2}} S_n) \leq \sqrt{\mathbb{E}\big((n^{\frac{1}{2}} S_n)^2\big)} = \sqrt{\mathbb{V}(X_1)} < \infty.$$

Betrachten wir nun den Fall $\alpha \in (1,2)$:

Einschub: Ist $\alpha \in (0,2]$ und Y_α eine reelle Zufallsvariable mit α-stabiler nicht-entarteter Verteilung, sowie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig identisch verteilter reeller Zufallsvariablen mit $a_n^{-1}(S_n - b_n) \xrightarrow{d} Y_\alpha$ für geeignete reelle Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so ist für jedes $\kappa \in (0,\alpha)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|a_n^{-1}(S_n - b_n)|^\kappa) = \mathbb{E}(|Y_\alpha|^\kappa)$$

(siehe Theorem 6.1 in [de Acosta & Giné] S. 225).

Da $\mathbb{E}(|Y_\alpha|^\kappa)$ laut Satz 3.1.18 auf Seite 102 existiert (d.h $< \infty$ ist) erhalten wir für $\beta \in (0,\alpha)$

$$\mathbb{E}(|n^{-\frac{1}{\beta}} S_n|) = a_n n^{-\frac{1}{\beta}} \cdot \mathbb{E}(|a_n^{-1} S_n|) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

denn $a_n n^{-\frac{1}{\beta}}$ konvergiert nach Lemma 3.1.11 und Satz 3.1.10 (S. 98 bzw. 98) gegen 0. Demnach ist $\mathbb{E}(|n^{-\frac{1}{\beta}} S_n|)$ für alle $\beta \in (0,\alpha)$ beschränkt. $\square$

Beweis von Lemma 3.3.2, Teil *(1)*

Seien $y_1, \dots, y_h \in \mathbb{R}^+$ und

$$R_{y_1,\dots,y_h} := \big\{(x_1, \dots, x_h) \in \mathbb{R}^h \backslash \{0\} \;\big|\; |x_i| \le y_i\big\}$$

dann ist

$$\begin{aligned}
&P\big[\max_{1\le l\le h}\max_{0\le k\le n-1} a_n^{-1}|S_{k+l} - S_k| \le y_l;\ \big]\\
=&P\big[\max_{1\le k\le n} a_n^{-1}|X_k + \ldots + X_{k+l-1}| \le y_l;\ l = 1, \dots, h\big]\\
=&P\big[a_n^{-1}|X_{k+l-1}| \le y_l;\ k = 1, \dots, n,\ l = 1, \dots, h\big]\\
=&P\big[a_n^{-1}(X_k, X_k + X_{k+1}, \dots, X_k + \ldots + X_{k+h-1}) \in R_{y_1,\dots,y_h}\ \forall\ k = 1, \dots, n\big]\\
=&P\Big[\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \delta_{a_n^{-1}(X_k,X_k+X_{k+1},\dots,X_k+\ldots+X_{k+h-1})}\big[R^c_{y_1,\dots,y_h}\big]}_{=N_n[R^c_{y_1,\dots,y_h}],\ da\ 0\notin R^c_{y_1,\dots,y_h}} = 0\Big].
\end{aligned}$$

Wir haben uns bereits in der Vorbereitung dieses Kapitels mit dem Grenzverhalten in Verteilung des Zufälligen Maßes $N_n := \sum_{k=1}^n \delta_{a_n^{-1}(X_k,X_k+X_{k+1},\dots,X_k+\ldots+X_{k+h-1})}$ auf $\acute{\mathbb{R}}^h$ beschäftigt. Man beachte, dass – trotz der leider identischen Notation – zunächst zwischen dem Zufälligen Maßen $\sum_{k=1}^n \delta_{a_n^{-1}(X_k,X_k+X_{k+1},\dots,X_k+\ldots X_{k+h-1})}$ auf $\mathbb{R}^h$ und $\acute{\mathbb{R}}^h$ unterschieden werden muss. Gemäß Bemerkung 2.8.9 auf Seite 87 indzuiert der Punktprozess auf $\mathbb{R}^h$ jedoch einen entsprechenden Punktprozess auf $\acute{\mathbb{R}}^h$.
Da nicht notwendig $P[X_1 = 0] = 0$ gilt, sind die beiden Zufälligen Maße jedoch nur auf Mengen aus $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^h)$ identisch, die die Null nicht enthalten. Da $0 \notin R^c_{y_1,\dots,y_h}$ können wir aber dennoch auf die Aussagen aus Abschnitt 3.2 zurückgreifen. Nach Korollar 3.2.4 auf Seite 111 gilt in $\mathfrak{L}(M_+(\acute{\mathbb{R}}^h))$ die Konvergenz

$$N_n \xrightarrow{d} N := \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h} \delta_{J_k \mathbf{s}_i} \quad mit \;\; \mathbf{s}_i := \sum_{j=i}^{h} \mathbf{e}_j,$$

wobei die J_i die Punkte eines Poisson'schen Punktprozesses zu Intensitätsmaß μ sind.

Nehmen wir an, dass $R_{y_1,\dots,y_h} \in \mathcal{R}_N$ ist, so dürfen wir nach Theorem 2.7.4 auf Seite 82 und Lemma 2.7.2 auf Seite 81 folgern:

$$N_n[R^c_{y_1,\dots,y_h}] \xrightarrow{d} N[R^c_{y_1,\dots,y_h}].$$

Wir behaupten also: $R^c_{y_1,\dots,y_h} \in \mathcal{R}_N$.

Beweis. Die relative Kompaktheit wurde bereits in Beispiel 1.3.7 auf Seite 36 bewiesen. Wir müssen also nur noch zeigen, dass $P\big[N[\partial R^c_{y_1,\dots,y_h}] = 0\big] = 1$ ist.

$$
\begin{aligned}
P\Big[N[\partial R^c_{y_1,\dots,y_h}]=0\Big] &= P\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h}\delta_{J_k\mathbf{s}_i}\Big[\Big\{x\in\acute{\mathbb{R}}^h \;\Big|\; |x_l|=y_l,\ l=1,\dots,h\Big\}\Big]=0\Big]\\
\overset{y_l>0}{}&= P\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{J_k\mathbf{s}_1}\Big[\Big\{x\in\acute{\mathbb{R}}^h \;\Big|\; |x_l|=y_l,\ l=1,\dots,h\Big\}\Big]=0\Big]\\
&= \begin{cases} 1, & \textit{falls nicht } y_1=\ldots=y_h\\ P\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{J_k}\big[\{y_1\}\big]=0\Big], & \textit{falls } y_1=\ldots=y_h\end{cases}\\
&= 1,
\end{aligned}
$$

denn

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{J_k}\big[\{y_1\}\big] &= PPP_\mu\big[\{y_1\}\big]\\
\Rightarrow P\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{J_k}\big[\{y_1\}\big]=0\Big] &= P\big[PPP_\mu\big[\{y_1\}\big]=0\big]\\
&= \exp\Big(-\mu\big[\{y_1\}\big]\Big)\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

□

Wir wissen also

$$N_n[R^c_{y_1,\dots,y_h}]\xrightarrow{d}N[R^c_{y_1,\dots,y_h}].$$

Die stetige Abbildung $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto(1-|x|)\mathbb{I}_{[-1,1]}(x)$ ist beschränkt. Nach der Definition der Konvergenz in Verteilung gilt demnach:

$$P\big[N_n[R^c_{y_1,\dots,y_h}]=0\big]=\int_{\mathbb{R}}\varphi\ dP_{N_n[R^c_{y_1,\dots,y_h}]}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_{\mathbb{R}}\varphi\ dP_{N[R^c_{y_1,\dots,y_h}]}=P\big[N[R^c_{y_1,\dots,y_h}]=0\big].$$

Die beiden Gleichheiten ergeben sich daraus, dass die Punktprozesse N_n und N nur Werte in $\mathbb{N}_0$ annehmen und daher in obiger Gleichung im Geiste φ durch $\mathbb{I}_{\{0\}}$ ersetzt werden kann.

Betrachten wir nun den Fall, dass $0<y_1<\ldots<y_h$ aufsteigend sind. Es gilt einerseits (vgl. Seite 115)

$$P\big[N_n[R^c_{y_1,\dots,y_h}]=0\big]=P\big[\max_{1\le l\le h}\max_{0\le k\le n-1}a_n^{-1}|S_{k+l}-S_k|\le y_l\big].$$

Andererseits ist $J_k\mathbf{e}_l\in R_{y_1,\dots,y_h}$ genau dann, wenn $J_k\mathbf{e}_l,\dots,J_k\mathbf{e}_h\in R_{y_1,\dots,y_h}$ ist, genau dann, wenn $J_k\mathbf{s}_l\in R_{y_1,\dots,y_h}$ ist und damit:

$$\begin{aligned}
P\big[N[R^c_{y_1,\dots,y_h}]=0\big] &= P\big[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{h}\delta_{J_k\mathbf{s}_l}[R^c_{y_1,\dots,y_h}]=0\big]\\
&= P\big[J_k\mathbf{s}_l\in R_{y_1,\dots,y_h}\ \ \textit{für alle } k\in\mathbb{N} \textit{ und } l=1,\dots,h\big]\\
&= P\big[J_k\mathbf{e}_l\in R_{y_1,\dots,y_h}\ \ \textit{für alle } k\in\mathbb{N} \textit{ und } l=1,\dots,h\big]\\
&= P\big[J_k\le y_l\ \ \textit{für alle } k\in\mathbb{N} \textit{ und } l=1,\dots,h\big]\\
&= P\big[\sup_{k\in\mathbb{N}}|J_k|\le y_l,\ l=1,\dots,h\big]
\end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich demnach für $\gamma>0$ und $y_l:=l^\gamma x$ die Konvergenz

$$\begin{aligned}
P\big[a_n^{-1}\max_{1\le l\le h}\max_{0\le k\le n-1} l^{-\gamma}|S_{k+l}-S_k|\le x\big] &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} P\big[\sup_{k\in\mathbb{N}}|J_k|\le l^\gamma x,\ l=1,\dots,h\big]\\
&\overset{\gamma\ge 0}{=} P\big[\sup_{k\in\mathbb{N}}|J_k|\le x\big].
\end{aligned}$$

Nun bestimmen wir den Wert des rechten Terms. Laut Korollar 3.2.4 auf Seite 111 sind die J_k Punkte eines Poisson'schen Punkprozesses auf $\acute{\mathbb{R}}$ mit Intensitätsmaß μ. Wenden wir nun Satz 2.8.14 auf Seite 93 auf die Abbildung

$$T:\acute{\mathbb{R}}\longrightarrow\acute{\mathbb{R}}\backslash\mathbb{R}^-,\ x\longmapsto\begin{cases}|x|, & \textit{falls } x\ne p_\infty\\ p_\infty, & \textit{falls } x=p_\infty\end{cases}$$

an, so folgt, dass die $|J_k|$ die Punkte eines Poisson'schen Punkprozesses auf $\acute{\mathbb{R}}\backslash\mathbb{R}^-$ mit Intensitätsmaß ν, gegeben durch

$$\nu\big[(x,\infty)\big]=x^{-\alpha}\quad\text{für alle } x>0$$

sind. Eine weitere Anwendung von Satz 2.8.14 auf die Abbildung

$$T':\acute{\mathbb{R}}\backslash\mathbb{R}^-\longrightarrow\mathbb{R}_0^+,\ x\longmapsto\begin{cases}x^{-\alpha}, & \textit{falls } x\ne p_\infty\\ 0, & \textit{falls } x=p_\infty\end{cases}$$

ergibt, dass die $\widetilde{\Gamma}_k:=T'(|J_k|)$ Punkte eines Poisson'schen Punktprozesses mit Intensitätsmaß ρ auf $\mathbb{R}_0^+$, gegeben durch

$$\rho\big[[0,x)\big]=x\quad\text{für alle } x>0$$

sind. ρ ist also die Restriktion des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}_0^+$.

Behauptung. Die $\widetilde{\Gamma}_k$ lassen sich dann umnummerieren zu aufsteigenden

$$\Gamma_1<\Gamma_2<\dots.$$

Beweis. Um nachzuweisen, dass sich die $\widetilde{\Gamma}_k$ wirklich in eine aufsteigende Reihenfolge bringen lassen, betrachten wir den zu ρ gehörenden Poisson'sche Punktprozess PPP_ρ auf $\mathbb{R}_0^+$. Es gilt:

$$\begin{aligned} P\Big[PPP_\rho\big[[0,t]\big] = \infty\Big] &= 1 - P\Big[PPP_\rho\big[[0,t]\big] \in \mathbb{N}\Big] \\ &\overset{Def.\ 2.8.10}{=} 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \exp\Big(-\mu\big[[0,t]\big]\Big) \frac{\mu\big[[0,t]\big]^k}{k!} \\ &\overset{\rho[0,t]]=t}{=} 1 - \exp(-t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = 0. \end{aligned}$$

Also gibt es für jedes $t \in \mathbb{R}^+$ fast sicher nur endlich viele „Massepunkte“ von PPP_ρ in $[0,t]$. Daher lassen sich die Punkte in aufsteigende Reihenfolge bringen. □

Beachte, dass die Umnummerierung keinen Einfluss auf den zugehörigen Punktprozess hat. Sind die Γ_k aufsteigend, so sind die

$$T^{-1}(\Gamma_k) = \Gamma_k^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

absteigend. Insbesondere ist also

$$\Gamma_1^{-\frac{1}{\alpha}} = \max_{k\in\mathbb{N}} \Gamma_k^{-\frac{1}{\alpha}} = \max_{k\in\mathbb{N}} |J_k|.$$

Somit gilt für ein $x > 0$

$$P\big[\sup_{k\in\mathbb{N}} |J_k| \le x\big] \overset{s.o.}{=} P\big[\Gamma_1^{-\frac{1}{\alpha}} \le x\big] = P\big[\Gamma_1 \ge x^\alpha\big].$$

Bezeichnet PPP_ρ einen Poisson'schen Punktprozess mit Intensitätsmaß ρ und zugehörigen Punkten Γ_i, so ist $\Gamma_1 \ge x^{-\alpha}$ äquivalent zu $PPP_\rho[[0,x^{-\alpha})] = 0$, denn Γ_1 ist der kleinste „Massepunkt“ von PPP_ρ. Daher:

$$\begin{aligned} P\Big[\Gamma_1 \ge x^\alpha\Big] &= P\Big[PPP_\rho\big[[0,x^{-\alpha})\big] = 0\Big] \overset{Def\ 2.8.10}{=} \exp\Big(-\rho\big[[0,x^{-\alpha})\big]\Big) \\ &= \exp\big(-x^{-\alpha}\big) \end{aligned}$$

und somit

$$P\big[\max_{1\le l\le h} \max_{0\le k\le n-1} a_n^{-1} l^{-\gamma} |S_{k+l} - S_k| \le x\big] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\big(-x^{-\alpha}\big)$$

für alle $x > 1$. Wir zeigen nun abschließend, dass

$$\big|\max_{1\le l\le h} \max_{0\le k\le n-l} a_n^{-1} l^{-\gamma} |S_{k+l} - S_k| - \max_{1\le l\le h} \max_{0\le k\le n-1} a_n^{-1} l^{-\gamma} |S_{k+l} - S_k|\big| \overset{P}{\longrightarrow} 0.$$

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $h < n$:

$$\begin{aligned} \max_{1\le l\le h} \max_{0\le k\le n-l} \left|\frac{S_{k+l} - S_k}{a_n l^\gamma}\right| &\le \max_{1\le l\le h} \max_{0\le k\le n-1} \left|\frac{S_{k+l} - S_k}{a_n l^\gamma}\right| \\ &\le \max_{1\le l\le h} \max_{0\le k\le n-l} \left|\frac{S_{k+l} - S_k}{a_n l^\gamma}\right| + \max_{1\le l\le h} \max_{n-l<k\le n-1} \left|\frac{S_{k+l} - S_k}{a_n l^\gamma}\right| \end{aligned}$$

Es reicht also, zu zeigen, dass $\max\limits_{1\le l\le h}\max\limits_{n-l<k\le n-1} a_n^{-1} l^{-\gamma}|S_{k+l}-S_k| \xrightarrow{P} 0$:

$$\begin{aligned}\max_{1\le l\le h}\max_{n-l<k\le n-1} a_n^{-1} l^{-\gamma}|S_{k+l}-S_k| &\stackrel{d}{=} \max_{1\le l\le h}\max_{1\le k\le l-1} a_n^{-1} l^{-\gamma}|S_{k+l}-S_k| \\ &\le \max_{1\le l\le h}\max_{1\le k\le l-1} a_n^{-1} l^{-\gamma}\sum_{i=k+1}^{k+l}|X_i| \\ &\le a_n^{-1}\cdot l^{-\gamma}\sum_{i=1}^{2h-1}|X_i| \xrightarrow{P} 0.\end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt also

$$d\text{-}\lim_{n\to\infty}\max_{1\le l\le h}\max_{0\le k\le n-l} a_n^{-1} l^{-\gamma}|S_{k+l}-S_k| = d\text{-}\lim_{n\to\infty}\max_{1\le l\le h}\max_{0\le k\le n-1} a_n^{-1} l^{-\gamma}|S_{k+l}-S_k|$$

(vgl. Korollar 2.1.23 S. 46) und damit

$$P\big[\max_{1\le l\le h}\max_{0\le k\le n-l} a_n^{-1} l^{-\gamma}|S_{k+l}-S_k| \le x\big] \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\big(-x^{-\alpha}\big).$$

■

Beweis von Lemma 3.3.2, Teil *(2)*

Zunächst benötigen wir die folgende Abschätzung:

3.3.4 Lemma *Sei $(X_i' : \Omega \longrightarrow \mathbb{R})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen und $S_k' := \sum_{i=1}^k X_i'$. Dann gilt für alle $\delta, \gamma > 0$, $h \ge 1$ und $H \le n$:*

$$P\left[a_n^{-1}\max_{h<l\le H}\max_{0\le k\le n-l}\left|\frac{S_{k+l}'-S_k'}{l^\gamma}\right| > \delta\ \right] \le \sum_{\lceil\log_2(nH^{-1})\rceil+1}^{\lfloor\log_2(nh^{-1})\rfloor} 2^{j+1} P\big[a_n^{-1}\max_{1\le k\le n2^{-j+1}}|S_k'| > \delta(n2^{-j})^\gamma\big],$$

wobei $\lfloor\bullet\rfloor := \sup\{z \in \mathbb{Z} \mid z \le \bullet\}$ bzw. $\lceil\bullet\rceil := \inf\{z\in\mathbb{Z} \mid z \ge \bullet\}$ die untere bzw. obere Gaußklammer bezeichnet.

Beweis. (Im Folgenden werden alle Maxima nur über die ganzzahligen Indizes gebildet)

Es seien $j_0 := \log_2(nH^{-1}) + 1$, $j_1 := \log_2(nh^{-1})$ und $J := \{j_0, \ldots, j_1\}$. Dann bilden die Mengen

$$L_j = \big(n2^{-j}, n2^{-j+1}\big], \quad j \in J$$

eine Partition von $(h, H]$, d.h. die I_j sind paarweise disjunkt und

$$(h, H] = \bigcup_{j\in J} L_j. \tag{$*$}$$

Ebenso bilden für $j \in \mathbb{N}$ die disjunkten Mengen

$$K_i(j) := \big(n(i-1)2^{-j}, ni2^{-j}\big], \quad i \in I(j) := \big\{1, \dots, 2^j\big\}$$

eine Partition von $(0, n]$, d.h.

$$(0, n] = \bigcup_{i \in I(j)} K_i(j). \tag{$**$}$$

Somit ist folgende Abschätzung möglich:

$$\begin{aligned}
&\max_{h<l\leq H} \max_{0\leq k\leq n-l} \left| \frac{S'_{k+l} - S'_k}{l^\gamma} \right| \\
&\stackrel{(*)}{=} \max_{j\in J} \max_{l\in L_j} l^{-\gamma} \max_{1\leq k\leq n} \big|S'_{k+l} - S'_k\big| \\
&\leq \max_{j\in J} (n^{-1}2^j)^\gamma \max_{l\in L_j} \max_{1\leq k\leq n} \big|S'_{k+l} - S'_k\big| \\
&\stackrel{(**)}{=} \max_{j\in J} (n^{-1}2^j)^\gamma \max_{l\in L_j} \max_{i\in I(j)} \max_{k\in K_i(j)} \big|S'_{k+l} - S'_k\big| \\
&\leq \max_{j\in J} (n^{-1}2^j)^\gamma \max_{l\in L_j} \max_{i\in I(j)} \max_{k\in K_i(j)} \Big(\Big|S'_{k+l} - S'_{\lceil in2^{-j}\rceil}\Big| + \Big|S'_{\lceil in2^{-j}\rceil} - S'_k\Big|\Big).
\end{aligned}$$

Für $l \in L_j$ und $k \in K_i(j)$ ist $k + l \in \big(ni2^{-j}, n(i+2)2^{-j}\big] := U_i(j)$, und damit

$$\begin{aligned}
&\max_{j\in J} (n^{-1}2^j)^\gamma \max_{l\in L_j} \max_{i\in I(j)} \max_{k\in K_i(j)} \Big(\big|S'_{k+l} - S'_{\lceil in2^{-j}\rceil}\big| + \big|S'_{\lceil in2^{-j}\rceil} - S'_k\big|\Big) \\
&\quad\leq \underbrace{\max_{j\in J} (n^{-1}2^j)^\gamma \max_{i\in I(j)} \max_{u\in U_i(j)} \Big|S'_u - S'_{\lceil in2^{-j}\rceil}\Big|}_{=:M_1} + \underbrace{\max_{j\in J} (n^{-1}2^j)^\gamma \max_{i\in I(j)} \max_{k\in K_i(j)} \Big|S'_{\lceil in2^{-j}\rceil} - S'_k\Big|}_{=:M_2}.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhält man

$$P\Big[a_n^{-1} \max_{h<l\leq H} \max_{0\leq k\leq n-l} \Big| \frac{S'_{k+l} - S'_k}{l^\gamma} \Big| > \delta\ \Big] \leq \underbrace{P\big[M_1 > \delta\big]}_{=:P_1} + \underbrace{P\big[M_2 > \delta\big]}_{=:P_2}.$$

Nutzen wir aus, dass die X'_i unabhängig identisch Verteilt sind lassen sich die Wahrscheinlichkeiten P_1 und P_2 wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
P_1 &\leq \sum_{j=\lceil j_0\rceil}^{\lfloor j_1\rfloor} \sum_{i=1}^{2^n} P\Big[\max_{in2^{-j}<u\leq(i+2)n2^{-j}} \Big|S'_u - S'_{\lceil in2^{-j}\rceil}\Big| > a_n\delta(n2^{-j})^\gamma\Big] \\
&\stackrel{u.i.v.}{=} \sum_{\lceil \log_2(nH^{-1})\rceil+1}^{\lfloor \log_2(nh^{-1})\rfloor} 2^j P\Big[\max_{1\leq k\leq 2n2^{-j}} |S'_k| > a_n\delta(n2^{-j})^\gamma\Big], \\
P_2 &\leq \sum_{j=\lceil j_0\rceil}^{\lfloor j_1\rfloor} \sum_{i=1}^{2^n} P\Big[\max_{(i-1)n2^{-j}<k\leq in2^{-j}} \Big|S'_{\lceil in2^{-j}\rceil} - S'_k\Big| > a_n\delta(n2^{-j})^\gamma\Big] \\
&\stackrel{u.i.v.}{\leq} \sum_{\lceil \log_2(nH^{-1})\rceil+1}^{\lfloor \log_2(nh^{-1})\rfloor} 2^j P\Big[\max_{1\leq k\leq 2n2^{-j}} |S'_k| > a_n\delta(n2^{-j})^\gamma\Big].
\end{aligned}$$

Also ist

$$P\left[a_n^{-1}\max_{h<l\le H}\max_{0\le k\le n-l}\left|\frac{S'_{k+l}-S'_k}{l^\gamma}\right|>\delta\right]\le\sum_{\lceil\log_2(nH^{-1})\rceil+1}^{\lfloor\log_2(nh^{-1})\rfloor}2^{j+1}P\Big[a_n^{-1}\max_{1\le k\le n2^{-j+1}}|S'_k|>\delta(n2^{-j})^\gamma\Big].$$

□

Nun können wir mit dem Beweis von Lemma 3.3.2, Teil (2) beginnen. Wir setzen zunächst

$$X_i'^{(n)}:=X_i\mathbb{I}_{\{|X|\le h^\gamma a_n\}},\qquad S_k'^{(n)}:=\sum_{i=1}^k X_i'^{(n)}\ \forall k\ge1,\qquad X_i''^{(n)}:=X_i\mathbb{I}_{\{|X|>h^\gamma a_n\}}$$

$$\widetilde{X}_i^{(n)}:=X_i'^{(n)}-\mathbb{E}(X_1'^{(n)}),\qquad \widetilde{S}_k^{(n)}:=\sum_{i=1}^k\widetilde{X}_i^{(n)}\ \forall k\ge1,\qquad S_0'^{(n)}:=0\ \text{ sowie }\ \widetilde{S}_0^{(n)}:=0.$$

Es gilt für $x>0$:

$$\begin{aligned}
&P\Big[a_n^{-1}\max_{h<l\le n}\max_{0\le k\le n-l}l^{-\gamma}\big|S_{k+l}-S_k\big|>x\Big]\\
&=P\Big[\big\{a_n^{-1}\max_{h<l\le n}\max_{0\le k\le n-l}l^{-\gamma}\big|S_{k+l}-S_k\big|>x\big\}\cap\big\{a_n^{-1}\max_{1\le k\le n}|X_k|>h^\gamma\big\}\Big]\\
&\quad+P\Big[\big\{a_n^{-1}\max_{h<l\le n}\max_{0\le k\le n-l}l^{-\gamma}\big|S_{k+l}-S_k\big|>x\big\}\cap\big\{a_n^{-1}\max_{1\le k\le n}|X_k|\le h^\gamma\big\}\Big]\\
&\le\underbrace{P\big[a_n^{-1}\max_{1\le k\le n}|X_k|>h^\gamma\big]}_{=:A_1(n,h,\gamma,\alpha)}+\underbrace{P\big[a_n^{-1}\max_{h<l\le n}\max_{0\le k\le n-l}l^{-\gamma}|S_{k+l}'^{(n)}-S_k'^{(n)}|>x\big]}_{=:A_2(n,h,\gamma,\alpha)}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Satz 3.1.15 auf Seite 101 erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}A_1(n,h,\gamma,\alpha)=1-\exp(-h^{-\gamma\alpha})\overset{h\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\lim_{h\to\infty}\lim_{n\to\infty}A_2(n,h,\gamma,\alpha)=0$ für alle $\alpha>0$ und zu den Voraussetzung des Lemmas passenden α und γ. Lemma 3.3.4 auf Seite 119 erlaubt die Abschätzung

$$A_2(n,h,\gamma,\alpha)\le\sum_{j=1}^{\lfloor\log_2(nh^{-1})\rfloor}2^{j+1}P\big[a_n^{-1}\max_{1\le k\le n2^{-j+1}}|S_k'^{(n)}|>x(n2^{-j})^\gamma\big].$$

Wir setzen

$$P_j:=P\big[a_n^{-1}\max_{1\le k\le n2^{-j+1}}|S_k'^{(n)}|>x(n2^{-j})^\gamma\big]$$

Sei zunächst $\alpha\in(0,1)$: Wir beginnen mit einer Abschätzung von $2^{j+1}P_j$. Es gilt:

$$\mathbb{E}\big(\max_{i\le k\le n2^{j+1}}|S_k'^{(n)}|\big)\le\mathbb{E}\Big(\max_{i\le k\le n2^{-j+1}}\sum_{i=1}^k|X_i'^{(n)}|\Big)\le\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{n2^{-j+1}}|X_i'^{(n)}|\Big)=n2^{-j+1}\mathbb{E}(|X_1'^{(n)}|).$$

Einschub: Markov Ungleichung. Ist $f:\mathbb{R}_0^+\longrightarrow\mathbb{R}_0^+$ monoton wachsend, $\varepsilon>0$ und $f(\varepsilon)>0$, so gilt für eine reelle Zufallsvariable X:

$$P[|X|\ge\varepsilon]\le\frac{\mathbb{E}(f(|X|))}{f(\varepsilon)}$$

(siehe [Klenke, 2008] S.110).

Mit dieser Ungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} 2^{j+1}P_j &= 2^{j+1}P\big[a_n^{-1}\max_{1\le k\le n2^{-j+1}}|S_k'^{(n)}| > x(n2^{-j})^{\gamma}\big] \\ &\overset{Markov}{\le} 2^{j+1}a_n^{-1}(n2^{-j})^{-\gamma}x^{-1}\mathbb{E}\big(\max_{1\le k\le n2^{-j+1}}|S_k'^{(n)}|\big) \\ &\le 4(n2^{-j})^{-\gamma}x^{-1}\cdot na_n^{-1}\mathbb{E}(|X_1'^{(n)}|). && =: \widehat{P}_j \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Konvergenzen

$$\begin{aligned} nP[|X_1| > h^{\gamma}a_n] &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} h^{-\gamma\alpha}, && \text{(siehe Satz 3.1.8 auf Seite 97)} \\ \frac{\mathbb{E}(|X_1'^{(n)}|)}{h^{\gamma}a_nP[|X_1| > h^{\gamma}a_n]} &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{1-\alpha} && \text{(siehe Korollar 3.1.14 auf Seite 99)} \end{aligned}$$

erhalten wir für $na_n^{-1}\mathbb{E}(X_1'^{(n)})$ das folgende asymptotische Verhalten:

$$na_n^{-1}\mathbb{E}(|X_1'^{(n)}|) = h^{\gamma}\cdot nP[|X_1| > h^{\gamma}a_n]\cdot\frac{\mathbb{E}(|X_1'^{(n)}|)}{a_nh^{\gamma}P[|X_1| > h^{\gamma}a_n]} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} h^{(1-\alpha)\gamma}(\alpha)(1-\alpha)^{-1}.$$

Demnach gibt es sicher ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $na_n^{-1}\mathbb{E}(X_1'^{(n)}) \le 2h^{(1-\alpha)\gamma}(\alpha)(1-\alpha)^{-1}$ und somit $\widehat{P}_j \le 8\alpha((1-\alpha)x)^{-1}(n2^{-j})^{-\gamma}h^{(1-\alpha)\gamma}$ für alle $n \ge n_0$. Bei der folgenden Summenabschätzung werden wir uns die Gleichung

$$(z-1)\sum_{i=0}^{k} z^i = z^{k+1}-1 \quad \textit{für alle } z\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}$$

zunutze machen:

$$\begin{aligned} & \widehat{P}_j \le \frac{8\alpha}{(1-\alpha)x}(n2^{-j})^{-\gamma}h^{(1-\alpha)\gamma} \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{\lfloor\log_2(nh^{-1})\rfloor} & \widehat{P}_j \le \frac{8\alpha}{(1-\alpha)x}h^{(1-\alpha)\gamma}n^{-\gamma}\sum_{j=1}^{\lfloor\log_2(nh^{-1})\rfloor} 2^{\gamma j} \\ & \le \frac{8\alpha}{(2^{\gamma}-1)(1-\alpha)x}h^{(1-\alpha)\gamma}n^{-\gamma}\big(2^{\gamma}2^{\log_2(nh^{-1})\gamma}-1\big) \\ & = \frac{8\alpha}{(2^{\gamma}-1)(1-\alpha)x}\Big(2^{\gamma}h^{(1-\alpha)\gamma}n^{-\gamma}\Big(\frac{n}{h}\Big)^{\gamma} - h^{(1-\alpha)\gamma}n^{-\gamma}\Big) \\ & \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{8\cdot 2^{\gamma}\alpha}{(2^{\gamma}-1)(1-\alpha)x}\cdot h^{-\alpha\gamma} \overset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{für alle } n\ge n_0,\ \alpha\in(0,1),\ \gamma>0. \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma für $\alpha \in (0,1)$ bewiesen.

Sei nun $\alpha \in (1,\infty)$: Es gelten also die zusätzlichen Bedingungen $\gamma > \max\{0, \frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\}$, $\mathbb{E}(X_i) = 0$ und nach Voraussetzung bzw. Satz 3.3.3 auf Seite 114 ist

$$\sup\mathbb{E}(|n^{-\frac{1}{\beta}}S_n|) < \infty \quad \textit{für} \begin{cases} \beta = 2, & \textit{falls } \alpha > 2 \\ \forall\beta\in(0,\alpha), & \textit{falls } 1<\alpha\le 2. \end{cases}$$

Man beachte, dass in diesem Fall aus $X_1 = X_1'^{(n)} + X_1''^{(n)}$ folgt, dass $\mathbb{E}(X_1'^{(n)}) = -\mathbb{E}(X_1''^{(n)})$ ist. Des Weiteren folgt aus Korollar 3.1.14 auf Seite 99, dass $\mathbb{E}(|X_1''^{(n)}|) < \mathbb{E}(|X_1|) < \infty$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt also:

$$\begin{aligned} a_n^{-1} \max_{1\le k\le n2^{-j+1}} |\mathbb{E}(S_k'^{(n)})| &= a_n^{-1} \max_{1\le k\le n2^{-j+1}} |k\mathbb{E}(X_1'^{(n)})| = n2^{-j+1}a_n^{-1}|\mathbb{E}(X_1''^{(n)})| \\ &\le n2^{-j+1}a_n^{-1}\mathbb{E}(|X_1''^{(n)}|). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Konvergenzen

$$nP[|X_1| > h^\gamma a_n] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} h^{-\gamma\alpha}, \qquad \text{(siehe Satz 3.1.8 auf Seite 97)}$$

$$\frac{\mathbb{E}(|X_1''^{(n)}|)}{h^\gamma a_n P[|X_1| > h^\gamma a_n]} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{\alpha-1} \qquad \text{(siehe Korollar 3.1.14 auf Seite 99)}$$

erhalten wir für $\mathbb{E}(|X_1''^{(n)}|)$ das asymptotische Verhalten

$$\begin{aligned} na_n^{-1}\mathbb{E}(|X_1''^{(n)}|) &= h^\gamma \cdot nP[|X_1| > h^\gamma a_n] \cdot \frac{\mathbb{E}(|X_1''^{(n)}|)}{h^\gamma a_n P[|X_1| > h^\gamma a_n]} \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} h^{-(\alpha-1)\gamma}\alpha(\alpha-1)^{-1}. \qquad =: c_1 \end{aligned}$$

Demnach gibt es mit Sicherheit für jedes $x \in \mathbb{R}^+$ und $j \in \mathbb{N}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass

$$a_n^{-1} \max_{1\le k\le n2^{-j+1}} |\mathbb{E}(S_k'^{(n)})| \le n2^{-j+1}a_n^{-1}\mathbb{E}(|X_1''^{(n)}|) \le 2^{-j+2}c_1 \le \frac{(n2^{-j})^\gamma x}{2} \qquad \forall n \ge n_0. \qquad (*)$$

Betrachten wir nun P_j:

$$\begin{aligned} P_j &= P\Big[a_n^{-1} \max_{1\le k\le n2^{-j+1}} |S_k'^{(n)}| > (n2^{-j})^\gamma x\Big] \\ &= P\Big[a_n^{-1}\big(\max_{1\le k\le n2^{-j+1}} |S_k'^{(n)}| - \max_{1\le k\le n2^{-j+1}} |\mathbb{E}(S_k'^{(n)})|\big) > (n2^{-j})^\gamma x - a_n^{-1} \max_{1\le k\le n2^{-j+1}} |\mathbb{E}(S_k'^{(n)})|\Big] \\ \overset{(*)}{}&\le P\Big[a_n^{-1} \max_{1\le k\le n2^{-j+1}} \big(|S_k'^{(n)}| - |\mathbb{E}(S_k'^{(n)})|\big) > 2^{-1}(n2^{-j})^\gamma x\Big] \\ &\le P\Big[\max_{1\le k\le n2^{-j+1}} |\widetilde{S}_k^{(n)}| > a_n 2^{-1}(n2^{-j})^\gamma x\Big] =: \widetilde{P}_j. \qquad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

Wenden wir die Markov Ungleichung mit $f(x) := x^p$ mit $1 < p \in \mathbb{N}$ auf $\widetilde{P}_j$ an, so erhalten wir

$$\widetilde{P}_j = P\Big[\max_{1\le k\le n2^{-j+1}} |\widetilde{S}_k^{(n)}| > a_n 2^{-1}(n2^{-j})^\gamma x\Big] \le \frac{\mathbb{E}\big(\max_{1\le k\le n2^{-j+1}} |\widetilde{S}_k^{(n)}|^p\big)}{\big(a_n 2^{-1}(n2^{-j})^\gamma x\big)^p}.$$

Einschub: Doob'sche Ungleichung. Ist $I \subset \mathbb{N}_0$ und $(Y_n)_{n\in I}$ ein Martingal oder positives Submartingal, so gilt für alle $N \in \mathbb{N}$ und $p > 1$:

$$\mathbb{E}\big(|Y_N|^p\big) \le \mathbb{E}\big(\sup_{1\le i\le N} |Y_i|\big) \le \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathbb{E}\big(|Y_N|^p\big)$$

(siehe [Klenke, 2008] S.220). Sei im Folgenden

$$p \in \mathbb{N},\ p \ge \max\{2, \alpha\}.$$

Da $(\widetilde{S}_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ ein Martingal ist, erhalten wir

$$\mathbb{E}\big(\max_{1\le k\le n2^{-j+1}} |\widetilde{S}_k^{(n)}|^p\big) \le \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathbb{E}\big(|\widetilde{S}_{n2^{-j+1}}^{(n)}|^p\big),$$

also

$$\widetilde{P}_j \le (a_n(n2^{-j})^\gamma)^{-p} \cdot \Big(\frac{2p}{(p-1)x}\Big)^p \cdot \mathbb{E}\big(|\widetilde{S}_{n2^{-j+1}}^{(n)}|^p\big). \qquad \textbf{(2)}$$

3.3.5 Bezeichnung Wir bezeichnen für $1 \le p < \infty$ mit

$$\mathfrak{L}^p := \Big\{X : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \;\Big|\; X \textit{ ist messbar und } \mathbb{E}(|X|^p) < \infty\Big\}$$

den Raum der Zufallsvariablen mit beschränkten p-ten absoluten Momenten. Auf diesem Raum definieren wir die Pseudonorm $\|X\|_p := \big(\mathbb{E}(|X|^p)\big)^{\frac{1}{p}}$.

Einschub: $\mathfrak{L}^p$-Ungleichung für Summen u.i.v. zentrierter Zufallsvariablen. Es gibt eine universelle Konstante $K \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $p > 1$, $N \in \mathbb{N}$ und unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen $Z_1, \dots Z_N \in \mathfrak{L}^p$ mit $\mathbb{E}(Z_1) = 0$ gilt:

$$\Big(\mathbb{E}\Big(\big|\sum_{i=1}^N Z_i\big|^p\Big)\Big)^{\frac{1}{p}} \le \frac{pK}{\log p}\Big(\mathbb{E}\Big(\big|\sum_{i=1}^N Z_i\big|\Big) + \Big(\mathbb{E}\Big(\max_{1\le i\le N} |Z_i|^p\Big)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big)$$

(siehe Theorem 6.20 auf Seite 171 in [Ledoux & Talagrand, 1991]).

Mit Hilfe dieser Ungleichung erhalten wir (für $p > 1$):

$$\mathbb{E}\big(|\widetilde{S}_{n2^{-j+1}}^{(n)}|^p\big) \le \Big(\frac{pK}{\log p}\Big)^p \Big(\mathbb{E}\big(|\widetilde{S}_{n2^{-j+1}}^{(n)}|\big) + \big(\mathbb{E}\big(\max_{1\le i\le n2^{-j+1}} |\widetilde{X}_i^{(n)}|^p\big)\big)^{\frac{1}{p}}\Big)^p.$$

Einschub: Loèves c_p-Ungleichung. Für nichtnegative reelle Zahlen a, b und $p \ge 1$ gilt

$$(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Diese Gleichung ist eine unmittelbare Folgerung aus der Hölder'schen Ungleichung (siehe Satz 6.5.4 (iii) in [Behrends, 2004] S. 145), die besagt, dass für reelle Zahlen $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$ und $1 \le p \le q \le \infty$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \le \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Setzt man hier $n = 2$, $y_1 = y_2 = 1$ und $x_1 = a$, $x_2 = b$ $(a, b \ge 0)$ so erhält man

$$\begin{aligned} a + b &\le \big(a^p + b^p\big)^{p^{-1}} 2^{q^{-1}} \\ \Rightarrow\ (a+p)^p &\le 2^{pq^{-1}}\big(a^p + b^p\big) = 2^{p-1}\big(a^p + b^p\big). \end{aligned}$$

Wir wenden nun die c_p-Ungleichung auf die obige Abschätzung des Erwartungswert von $|\widetilde{S}^{(n)}_{n2^{-j+1}}|$ an und erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(|\widetilde{S}^{(n)}_{n2^{-j+1}}|^p\big) &\leq \frac{1}{2}\Big(\frac{2pK}{\log p}\Big)^p\Big(\big(\mathbb{E}\big(|\widetilde{S}^{(n)}_{n2^{-j+1}}|\big)\big)^p + \mathbb{E}\big(\max_{1\leq i\leq n2^{-j+1}} |\widetilde{X}^{(n)}_i|^p\big)\Big)\\
&\leq \frac{1}{2}\Big(\frac{2pK}{\log p}\Big)^p\Big(\big(\mathbb{E}\big(|\widetilde{S}^{(n)}_{n2^{-j+1}}|\big)\big)^p + \mathbb{E}\Big(\sum\nolimits_{i=1}^{n2^{-j+1}} |\widetilde{X}^{(n)}_i|^p\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{2pK}{\log p}\Big)^p\Big(\big(\mathbb{E}\big(|\widetilde{S}^{(n)}_{n2^{-j+1}}|\big)\big)^p + (n2^{-j+1})\mathbb{E}\big(|\widetilde{X}^{(n)}_1|^p\big)\Big). \qquad \textbf{(3)}
\end{aligned}$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|\widetilde{S}^{(n)}_{n2^{-j+1}}|) &= \mathbb{E}\Big(\Big|\Big(\sum_{i=1}^{2n^{-j+1}} X'^{(n)}_i\Big) - (n2^{-j+1})\mathbb{E}(X'^{(n)}_1)\Big|\Big)\\
&= \mathbb{E}\Big(\Big|S_{n2^{-j+1}} - \Big(\sum_{i=1}^{n2^{-j+1}} X''^{(n)}_i\Big) + (n2^{-j+1})\mathbb{E}(X''^{(n)}_1)\Big|\Big)\\
&\leq \mathbb{E}\Big(|S_{n2^{-j+1}}| + \Big(\sum_{i=1}^{n2^{-j+1}} |X''^{(n)}_i|\Big) + (n2^{-j+1})\mathbb{E}(|X''^{(n)}_1|)\Big)\\
&\leq \mathbb{E}(|S_{n2^{-j+1}}|) + n2^{-j+2}\mathbb{E}(|X''^{(n)}_1|),
\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile ausnutzen, dass $\mathbb{E}(X'^{(n)}_1) = -\mathbb{E}(X''^{(n)}_1)$ ist. Nach $(*)$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$n2^{-j+2}\mathbb{E}(|X''^{(n)}_1|) \leq a_n 2^{-j+3} c_1 = a_n 2^{-j+3} h^{-(\alpha-1)\gamma}\alpha(\alpha-1)^{-1}$$

für alle $n \geq n_0$. Weiterhin existiert laut Voraussetzung bzw. Satz 3.3.3 auf Seite 114 für alle $\beta \in (0,\alpha)$, falls $\alpha \in (1,2]$, bzw. für $\beta = 2$, falls $\alpha > 2$, eine Konstante $c_{(\beta)} \in \mathbb{R}^+$, so dass gilt:

$$\mathbb{E}(|S_{n2^{-j+1}}|) \leq c_{(\beta)}(n2^{-j+1})^{\frac{1}{\beta}}$$

Es sei im Folgenden

$$\begin{array}{ll} \beta = 2, & \textit{falls } \alpha > 2 \\ \frac{1}{\gamma-\frac{1}{\alpha}} < \beta < \alpha, & \textit{falls} \alpha \leq 2. \end{array} \qquad (**)$$

Zusammenfassend erhalten wir:

$$\mathbb{E}(|\widetilde{S}^{(n)}_{n2^{-j+1}}|) \leq a_n 2^{-j+3} h^{-(\alpha-1)\gamma}\alpha(\alpha-1)^{-1} + c_{(\beta)}(n2^{-j+1})^{\frac{1}{\beta}} \qquad \textbf{(4)}$$

Wir betrachten nun $\mathbb{E}(|\widetilde{X}^{(n)}_1|)$. Hierzu überlegen wir uns zunächst, dass für zwei reelle Zahlenfolgen a_n, b_n mit $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und $|a_n - b_n| \leq c' \in \mathbb{R}^+$ gilt, dass $\frac{b_n}{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Diese Behauptung folgt sofort aus der Umformung $c' \geq |a_n - b_n| = a_n \cdot |1 - a_n^{-1} b_n|$ (beachte, dass a_n für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ größer als Null ist). $\|\bullet\|_p := \big(\mathbb{E}(|\bullet|^p)\big)^{\frac{1}{p}}$ ist für $p \geq 1$ eine Pseudo-Norm auf $\mathfrak{L}^p$ (vgl. [Klenke, 2008] S. 93 f.), somit gilt insbesondere die Dreiecksungleichung. Diese liefert die Abschätzung

$$\big|\|X'^{(n)}_1\|_p - \|\widetilde{X}^{(n)}_1\|_p\big| \leq \|X'^{(n)}_1 - \widetilde{X}^{(n)}_1\|_p = \|\mathbb{E}(X'^{(n)}_1)\|_p = |\mathbb{E}(X'^{(n)}_1)| \leq |\mathbb{E}(X_1)| < \infty.$$

Mit der obigen Überlegung bedeutet dies:

$$\frac{\mathbb{E}(|X_1'^{(n)}|^p)}{\mathbb{E}(|\widetilde{X}_1^{(n)}|^p)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

also gibt es sicher ein n_0 in $\mathbb{N}$, so dass $\mathbb{E}(|\widetilde{X}_1^{(n)}|^p) \leq 2\mathbb{E}(|X_1'^{(n)}|^p)$ für alle $n \geq n_0$. X_1^p ist gemäß Lemma 3.1.4 auf Seite 96 regulär variierend zum Index $\frac{alpha}{p} < 1$ und es gilt

$$\mathbb{E}(|X_1'^{(n)}|^p) = \mathbb{E}(|X|^p \mathbb{I}_{\{|X_1| \leq h^\gamma a_n\}}).$$

Mit Hilfe von Korollar 3.1.14 auf Seite 99 erhalten wir demnach

$$\begin{aligned} n a_n^{-p} \mathbb{E}(|X_1'^{(n)}|^p) &= h^{p\gamma} \cdot nP[|X_1| > h^\gamma a_n] \cdot \frac{\mathbb{E}(|X_1'^{(n)}|^p)}{(a_n h^\gamma)^p P[|X_1|^p > (h^\gamma a_n)^p]} \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} h^{(p-\alpha)\gamma} \cdot \frac{\alpha}{p}\Big(1 - \frac{\alpha}{p}\Big)^{-1}. \end{aligned}$$

Für $c_2 := 2\alpha p^{-1}(1 - \alpha p^{-1})^{-1} > 0$ gibt es somit sicherlich ein $n_o \in \mathbb{N}$, so dass

$$\mathbb{E}(|\widetilde{X}_1^{(n)}|^p) \leq 2\mathbb{E}(|X_1'^{(n)}|^p) \leq a_n^p n^{-1} h^{(p-\alpha)\gamma} c_2. \tag{5}$$

Fassen wir nun die Ungleichungen **(1)** bis **(5)** zusammen:

$$\begin{aligned} P_j &\overset{(1)}{\leq} \widehat{P}_j \\ &\overset{(2)}{\leq} (a_n(n2^{-j})^\gamma)^{-p} \cdot \Big(\frac{2p}{(p-1)x}\Big)^p \cdot \mathbb{E}\big(|\widetilde{S}_{n2^{-j+1}}^{(n)}|^p\big) \\ &\overset{(3)}{\leq} (a_n(n2^{-j})^\gamma)^{-p} \cdot \Big(\frac{2p}{(p-1)x}\Big)^p \cdot 2^{-1}\Big(\frac{2pK}{\log p}\Big)^p \Big(\big(\mathbb{E}\big(|\widetilde{S}_{n2^{-j+1}}^{(n)}|\big)\big)^p + (n2^{-j+1})\mathbb{E}\big(|\widetilde{X}_1^{(n)}|^p\big)\Big) \\ &\overset{(4),(5)}{\leq} (a_n(n2^{-j})^\gamma)^{-p} \cdot \frac{1}{2}\Big(\frac{4p^2K}{(p-1)(\log p)x}\Big)^p \cdot \big(a_n 2^{-j+3} h^{-(\alpha-1)\gamma}\alpha(\alpha-1)^{-1} + c_{(\beta)}(n2^{-j+1})^{\frac{1}{\beta}}\big)^p \\ &\quad + (a_n(n2^{-j})^\gamma)^{-p} \cdot \frac{1}{2}\Big(\frac{4p^2K}{(p-1)(\log p)x}\Big)^p \cdot (n2^{-j+1})\big(a_n^p n^{-1} h^{(p-\alpha)\gamma} c_2\big) \\ &\overset{\textit{Loève}}{\leq} (a_n(n2^{-j})^\gamma)^{-p} \cdot \frac{1}{2}\Big(\frac{4p^2K}{(p-1)(\log p)x}\Big)^p \cdot 2^{p-1}\big(a_n 2^{-j+3} h^{-(\alpha-1)\gamma}\alpha(\alpha-1)^{-1}\big)^p \\ &\quad + (a_n(n2^{-j})^\gamma)^{-p} \cdot \frac{1}{2}\Big(\frac{4p^2K}{(p-1)(\log p)x}\Big)^p \cdot 2^{p-1}\big(c_{(\beta)}(n2^{-j+1})^{1/\beta}\big)^p \\ &\quad + (a_n(n2^{-j})^\gamma)^{-p} \cdot \frac{1}{2}\Big(\frac{4p^2K}{(p-1)(\log p)x}\Big)^p \cdot (n2^{-j+1})\big(a_n^p n^{-1} h^{(p-\alpha)\gamma} c_2\big)\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\frac{2^6 p^2 K\alpha}{(p-1)(\log p)(\alpha-1)x}\Big)^p \cdot \Big(\frac{2^{(\gamma-1)j}}{n^\gamma h^{(\alpha-1)\gamma}}\Big)^p \\ &\quad + \frac{1}{4}\Big(\frac{2^{3+\frac{1}{\beta}} c_{(\beta)}}{(p-1)(\log p)x}\Big) \cdot \Big(\frac{2^{j(\gamma-\frac{1}{\beta})}}{a_n n^{\gamma-\frac{1}{\beta}}}\Big)^p \\ &\quad + c_2\Big(\frac{4p^2K}{(p-1)(\log p)x}\Big)^p \cdot 2^{(\gamma-1)j} n^{-p\gamma} h^{(p-\alpha)\gamma} \quad \textit{für alle } j \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^+, \textit{ und } p > \alpha. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$
\begin{aligned}
T_1(j,n,h) &:= \Big(\frac{2^{(\gamma-1)j}}{n^\gamma h^{(\alpha-1)\gamma}}\Big)^p \\
T_2(j,n,h) &:= \Bigg(\frac{2^{j(\gamma-\frac{1}{\beta})}}{a_n n^{\gamma-\frac{1}{\beta}}}\Bigg)^p \\
T_3(j,n,h) &:= 2^{(\gamma p-1)j} n^{-\gamma p} h^{(p-\alpha)\gamma}
\end{aligned}
$$

und schätzen die Summen $\sum_{j=1}^{\lfloor \log_2(nh^{-1})\rfloor} T_i(j,n,h)$ für $i=1,2,3$ nach oben ab. Dabei machen wir wieder von der Gleichung

$$(z-1)\sum_{i=0}^{k} z^i = z^{k+1}-1 \quad \textit{für alle } z\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}$$

gebrauch.

i=1: Sei $((\gamma-1)p+1)\neq 0$

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\lfloor \log_2(nh^{-1})\rfloor} 2^j T_1(j,n,h) &= n^{-\gamma p} h^{-(\alpha-1)\gamma p} \sum_{j=1}^{\lfloor \log_2(nh^{-1})\rfloor} 2^{((\gamma-1)p+1)j} \\
&\leq \frac{n^{-\gamma p} h^{-(\alpha-1)\gamma p}}{2^{((\gamma-1)p+1)j}-1}\Big(2^{((\gamma-1)p+1)j}\cdot 2^{\log_2(nh^{-1})((\gamma-1)p+1)}-1\Big) \\
&= \frac{2^{((\gamma-1)p+1)j}\cdot n^{-\gamma p} h^{-(\alpha-1)\gamma p}(nh^{-1})^{((\gamma-1)p+1)}}{2^{((\gamma-1)p+1)j}-1} - \frac{n^{-\gamma p} h^{-(\alpha-1)\gamma p}}{2^{((\gamma-1)p+1)j}-1} \\
&= \frac{2^{((\gamma-1)p+1)j}}{2^{((\gamma-1)p+1)j}-1}\cdot n^{-(p-1)} h^{(1-\alpha\gamma)p-1} - \frac{n^{-\gamma p} h^{-(\alpha-1)\gamma p}}{2^{((\gamma-1)p+1)j}-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Der Fall $((\gamma-1)p+1)=0$ ist trivial.

i=3:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\lfloor \log_2(nh^{-1})\rfloor} 2^j T_3(j,n,h) &= n^{-p\gamma} h^{(p-\alpha)\gamma} \sum_{j=1}^{\lfloor \log_2(nh^{-1})\rfloor} 2^{\gamma p j} \\
&\leq \frac{n^{-p\gamma} h^{(p-\alpha)\gamma}}{2^{\gamma p}-1}\Big(2^{\gamma p}\cdot 2^{(\log_2(nh^{-1}))\gamma p}-1\Big) \\
&= \frac{2^{\gamma p}}{2^{\gamma p}-1}\cdot n^{-p\gamma} h^{(p-\alpha)\gamma}(nh^{-1})^{\gamma p} - \frac{n^{-p\gamma} h^{(p-\alpha)\gamma}}{2^{\gamma p}-1} \\
&= \frac{2^{\gamma p}}{2^{\gamma p}-1}\cdot h^{-\alpha\gamma} - \frac{n^{-p\gamma} h^{(p-\alpha)\gamma}}{2^{\gamma p}-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2^{\gamma p}}{2^{\gamma p}-1}\cdot h^{-\alpha\gamma} \overset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

i=2: Sei zunächst $(\gamma - \frac{1}{\beta})p + 1 \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\lfloor \log_2(nh^{-1})\rfloor} 2^j T_2(j,n,h) &= a_n^{-p} n^{-(\gamma-\frac{1}{\beta})p} \sum_{j=1}^{\lfloor \log_2(nh^{-1})\rfloor} 2^{((\gamma-\frac{1}{\beta})p+1)j} \\
&\leq \frac{a_n^{-p} n^{-(\gamma-\frac{1}{\beta})p}}{2^{(\gamma-\frac{1}{\beta})p+1}-1}\Big(2^{(\gamma-\frac{1}{\beta})p+1} 2^{(\log_2(nh^{-1}))((\gamma-\frac{1}{\beta})p+1)} - 1\Big) \\
&= \frac{2^{(\gamma-\frac{1}{\beta})p+1}}{2^{(\gamma-\frac{1}{\beta})p+1}-1} \cdot a_n^{-p} n^{-(\gamma-\frac{1}{\beta})p} (nh^{-1})^{(\gamma-\frac{1}{\beta})p+1} - \frac{a_n^{-p} n^{-(\gamma-\frac{1}{\beta})p}}{2^{(\gamma-\frac{1}{\beta})p+1}-1} \\
&= \frac{2^{(\gamma-\frac{1}{\beta})p+1}}{2^{(\gamma-\frac{1}{\beta})p+1}-1} \cdot a_n^{-p} n h^{(\frac{1}{\beta}-\gamma)p-1} - \frac{a_n^{-p} n^{-(\gamma-\frac{1}{\beta})p}}{2^{(\gamma-\frac{1}{\beta})p+1}-1}
\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.1.11 auf Seite 98 gibt es eine regulär variierende Funktion $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ zum Index $\frac{p}{\alpha}$ mit $a_n^{-p} = f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Bezeichnet $id_{|\mathbb{R}^+}$ die Identitäts-Abbildung auf $\mathbb{R}^+$, so variieren die Abbildungen

$$id_{|\mathbb{R}^+} \cdot f \quad \text{bzw.} \quad id_{|\mathbb{R}^+}^{-(\gamma-\frac{1}{\beta})p} \cdot f$$

regulär zum Index $\rho := \frac{p}{\alpha} - 1 > 0$ bzw. $\rho' = p(\gamma - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha})$. Für $\alpha > 2$ hatten wir $\beta = 2$ und für $\alpha \in (1,2]$ $\beta > \frac{1}{\gamma - \frac{1}{\alpha}}$ gewählt (siehe $**$). In beiden Fällen ergibt sich $\rho' > 0$ und mit Satz 3.1.10 auf Seite 98 gilt somit

$$\begin{aligned}
n a_n^{-p} &= n \cdot f(n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
n^{-(\gamma-\frac{1}{\beta})p} a_n^{-p} &= n^{-(\gamma-\frac{1}{\beta})p} \cdot f(n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Also geht auch $\sum_{j=1}^{\lfloor \log_2(nh^{-1})\rfloor} T_2(j,n,h)$ für $n \to \infty$ gegen Null.

Im Fall $(\gamma - \frac{1}{\beta})p + 1 = 0$ ist

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\lfloor \log_2(nh^{-1})\rfloor} 2^j T_2(j,n,h) &= a_n^{-p} n \sum_{j=1}^{\lfloor \log_2(nh^{-1})\rfloor} 2^0 \\
&\leq a_n^{-p} n \log_2(nh^{-1}) \\
&= a_n^{-p} n (\log_2 n - \log_2 h) \\
&\leq a_n^{-p} n \log_2(n+1) - a_n^{-p} n \log_2 h.
\end{aligned}$$

Unter Ausnutzung des langsamen Variation von $\log_2(\bullet + 1)$ (siehe Beispiel 3.1.2 auf Seite 96) folgt nun mit einer analogen Argumentation wie oben, dass beide Summanden für $n \to \infty$ gegen Null gehen.

Zusammenfassend gilt also für alle $x \in \mathbb{R}^+, p > \alpha$, dass es eine Konstante $K' \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass

$$\lim_{n\to\infty} A_2(n,h,\gamma,\alpha) \leq \lim_{n\to\infty} K'\big(T_1(j,n,h) + T_2(j,n,h) + T_3(j,n,h)\big) \overset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

■

Beweis von Theorem 3.3.1, Teil *(1)*

Wir setzen zunächst

$$\begin{aligned} M_n &:= \max_{1\le l\le n}\max_{0\le k\le n-l}\left|l^{-\gamma}(S_{k+l}-S_k)\right| \\ M_n^{\le h} &:= \max_{1\le l\le h}\max_{0\le k\le n-l}\left|l^{-\gamma}(S_{k+l}-S_k)\right| \\ M_n^{>h} &:= \max_{h< l\le n}\max_{0\le k\le n-l}\left|l^{-\gamma}(S_{k+l}-S_k)\right| \end{aligned}$$

Einerseits gilt $\limsup_{n\to\infty} P\left[a_n^{-1}M_n \le x\right] \le \limsup_{n\to\infty} P\left[a_n^{-1}M_n^{\le h} \le x\right] = \exp\bigl(-x^{-\alpha}\bigr)$, da offensichtlich $M_n \ge M_n^{\le h}$. Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} \left\{a_n^{-1}M_n \le x\right\} &= \left\{a_n^{-1}M_n^{\le h} \le x\right\} \cap \left\{a_n^{-1}M_n^{>h} \le x\right\} \\ \Rightarrow P\bigl[a_n^{-1}M_n \le x\bigr] &= P\bigl[\left\{a_n^{-1}M_n^{\le h} \le x\right\} \cap \left\{a_n^{-1}M_n^{>h} \le x\right\}\bigr] \\ &\ge P\bigl[\left\{a_n^{-1}M_n^{\le h} \le x\right\}\bigr] + P\bigl[a_n^{-1}\left\{M_n^{>h} \le x\right\}\bigr] - 1 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} P\bigl[a_n^{-1}M_n \le x\bigr] &= \liminf_{h\to\infty}\liminf_{n\to\infty} P\bigl[a_n^{-1}M_n \le x\bigr] \\ &\ge \liminf_{h\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\Bigl(P\bigl[a_n^{-1}M_n^{\le h} \le x\bigr] + P\bigl[a_n^{-1}M_n^{>h} \le x\bigr] - 1\Bigr) \\ &= \liminf_{h\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\Bigl(P\bigl[a_n^{-1}M_n^{\le h} \le x\bigr] - P\bigl[a_n^{-1}M_n^{>h} > x\bigr]\Bigr) \\ &\ge \liminf_{h\to\infty}\Bigl(\underbrace{\liminf_{n\to\infty} P\bigl[a_n^{-1}M_n^{\le h} \le x\bigr]}_{=\exp\left(-x^{-\alpha}\right)} - \underbrace{\limsup_{n\to\infty} P\bigl[a_n^{-1}M_n^{>h} > x\bigr]}_{\to 0 \text{ für } h\to\infty}\Bigr) \\ &= \exp\bigl(-x^{-\alpha}\bigr). \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt demnach:

$$\exp\bigl(-x^{-\alpha}\bigr) \le \liminf_{n\to\infty} P\bigl[a_n^{-1}M_n \le x\bigr] \le \limsup_{n\to\infty} P\bigl[a_n^{-1}M_n \le x\bigr] \le \exp\bigl(-x^{-\alpha}\bigr),$$

also

$$\lim_{n\to\infty} P\bigl[a_n^{-1}M_n \le x\bigr] = \exp\bigl(-x^{-\alpha}\bigr).$$

■

Beweis von Theorem 3.3.1, Teil *(2)*

Den zweiten Teil des Beweises teilen wir in folgende Lemmata auf:

3.3.6 Lemma *Für alle $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \geq 1$ und reelle Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ gilt*

$$\max_{1\le l\le n}\max_{0\le k\le n-l}\Big|\frac{S_{k+l}-S_k}{l^\gamma}\Big| = \max_{1\le k\le n}|X_k|$$

$$\max_{1\le l\le n}\max_{0\le k\le n-l}\Big|\frac{S_{k+l}-S_k-l\overline{X}_n}{l^\gamma}\Big| = \max_{1\le k\le n}|X_k-\overline{X}_n|$$

Beweis. Wir zeigen exemplarisch die zweite Gleichung. Für $l=1$ ist

$$l^{-\gamma}\big|S_{k+l}-S_k-l\overline{X}_n\big| = |X_{k+1}-\overline{X}_n|,$$

also ist

$$\max_{1\le l\le n}\max_{0\le k\le n-l} l^{-\gamma}\big|S_{k+l}-S_k-l\overline{X}_n\big| \geq \max_{1\le k\le n}|X_k-\overline{X}_n|.$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
\max_{1\le l\le n}\max_{0\le k\le n-l} l^{-\gamma}\big|S_{k+l}-S_k-l\overline{X}_n\big| &= \max_{1\le l\le n}\max_{0\le k\le n-l} l^{-\gamma}\Big|\sum_{i=k+1}^{k+l}(X_i-\overline{X}_n)\Big| \\
&\le \max_{1\le l\le n} l^{-1}\max_{0\le k\le n-l}\Big|\sum_{i=k+1}^{k+l}(X_i-\overline{X}_n)\Big| \\
&\le \max_{1\le l\le n} l^{-1}\max_{0\le k\le n-l} l\max_{k+1\le i\le k+l}\big|X_i-\overline{X}_n\big| \\
&= \max_{1\le k\le n}|X_k-\overline{X}_n|.
\end{aligned}$$

□

3.3.7 Lemma *Sei $(X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängig identisch verteilter, zum Index α regulär variierender Zufallsvariablen, und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $d_n \nearrow \infty$, $\frac{d_n}{n} \searrow 0$ und $d_n \le \frac{n}{2}$ für alle $n \geq 2$. Gilt weiterhin entweder*

- $\alpha \in (0,1)$ *und* $\gamma > 0$,
- $\alpha \in (1,\infty)\backslash\{2\}$, $\gamma > \max\{0, \frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}\}$ *und* $\mathbb{E}(X_i) = 0$

oder

- $\alpha = 2$, $\gamma > 0$, $\mathbb{E}(X_i) = 0$ *sowie* $\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}(|n^{-\frac{1}{\beta}}S_n|) < \infty$ *für alle* $\beta \in (0,2)$, *so ist*

$$\text{(1)}\qquad d\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}\max_{1\le l\le n}\max_{0\le k\le n-l}\Big|\frac{S_{k+l}-S_k}{l^\gamma}\Big| = d\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}\max_{1\le l\le n}\max_{0\le k\le n-l}\Big|\frac{S_{k+l}-S_k-l\overline{X}_n}{l^\gamma}\Big|,$$

$$\text{(2)}\qquad = d\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}\max_{1\le l\le d_n}\max_{0\le k\le n-l}\Big|\frac{S_{k+l}-S_k-l\overline{X}_n}{(l(1-\frac{l}{n}))^\gamma}\Big|,$$

$$\text{(3)}\qquad = d\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}\max_{1\le l\le \frac{n}{2}}\max_{0\le k\le n-l}\Big|\frac{S_{k+l}-S_k-l\overline{X}_n}{(l(1-\frac{l}{n}))^\gamma}\Big|,$$

$$\text{(4)}\qquad = d\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}\max_{1\le l< n}\max_{0\le k\le n-l}\Big|\frac{S_{k+l}-S_k-l\overline{X}_n}{(l(1-\frac{l}{n}))^\gamma}\Big|.$$

Beweis. Wir werden in diesem Beweis die Strategie verfolgen, die einzelnen Grenzwerte in Verteilung mit Hilfe von Korollar 2.1.23 auf Seite 46 sukzessiv aus der Existenz von

$$d\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}\max_{1\le l\le n}\max_{0\le k\le n-l}\Big|\frac{S_{k+l}-S_k}{l^\gamma}\Big|$$

(siehe Theorem 3.3.1 auf Seite 113 und Satz 2.1.21 auf Seite 46) herzuleiten.

(1): Sei zunächst $\gamma \ge 1$: Nach Lemma 3.3.6 reicht es aus, zu zeigen dass

$$d\text{-}\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le n}|X_k| = d\text{-}\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le n}|X_k-\overline{X}_n|$$

ist. Da

$$a_n^{-1}\max_{1\le k\le n}|X_k| - a_n^{-1}|\overline{X}_n| \le a_n^{-1}\max_{1\le k\le n}|X_k-\overline{X}_n| \le a_n^{-1}\max_{1\le k\le n}|X_k| + a_n^{-1}|\overline{X}_n|,$$

müssen wir nur noch

$$a_n^{-1}|\overline{X}_n| \xrightarrow{P} 0$$

nachweisen. Im Fall $\alpha \in (1,\infty)$ ist $\mathbb{E}(X_1)=0$ und gemäß Korollar 3.1.14 auf Seite 99 $X_1 \in \mathfrak{L}^1$.

Einschub: Das starke Gesetz der großen Zahl nach Etemadi besagt, dass für unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots \in \mathfrak{L}^1$ gilt:

$$P\Big[\limsup_{n\to\infty}\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathbb{E}(X_1))\Big| = 0\Big] = 1$$

(siehe [Klenke, 2008] S. 111 und 114).

Für unseren Fall ergibt sich demnach $\overline{X}_n \xrightarrow{f.ü.} 0$ und da $a_n^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (Satz 3.1.10 auf Seite 98) erhalten wir

$$a_n^{-1}|\overline{X}_n| \xrightarrow{f.ü.} 0, \tag{1}$$

wobei Fast-Überall-Konvergenz Konvergenz dem Maße nach impliziert.

Im Fall $\alpha \in (0,1)$ konvergiert $a_n^{-1}\sum_{i=1}^n |X_i|$ gemäß Korollar 3.1.20 auf Seite 102 in Verteilung gegen eine α-stabile Zufallsvariable Y_α. Es ergibt sich

$$a_n^{-1}|\overline{X}_n| \le n^{-1} \cdot a_n^{-1} \sum_{i=1}^n |X_i| \xrightarrow{P} 0. \tag{2}$$

Betrachten wir nun den Fall $\gamma \in (0,1)$: Für alle $l = 1, \dots, n$ gilt:

$$\begin{aligned} a_n^{-1} \max_{0\le k\le n-l}\left|\frac{S_{k+l}-S_k}{l^\gamma}\right| - a_n^{-1}\left|\frac{l\overline{X}_n}{l^\gamma}\right| &\le a_n^{-1} \max_{0\le k\le n-l}\left|\frac{S_{k+l}-S_k-l\overline{X}_n}{l^\gamma}\right| \\ &\le a_n^{-1} \max_{0\le k\le n-l}\left|\frac{S_{k+l}-S_k}{l^\gamma}\right| + a_n^{-1}\left|\frac{l\overline{X}_n}{l^\gamma}\right|, \end{aligned}$$

also reicht es, zu zeigen, dass

$$\max_{1\le l\le n} a_n^{-1}\left|\frac{l\overline{X}_n}{l^\gamma}\right| = a_n^{-1}n^{1-\gamma}|\overline{X}_n| \xrightarrow{P} 0.$$

Wir wählen $\beta = 2$ falls $\alpha > 2$ und $\beta \in ((\frac{1}{\alpha}+\gamma)^{-1}, \alpha)$ falls $\alpha \in (1,2)$. Dann ist in beiden Fällen $\gamma > \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}$ und es gilt $\sup \mathbb{E}(|n^{-1/\beta}S_n|) < \infty$ (siehe Voraussetzung bzw. Satz 3.3.3 auf Seite 114). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} &a_n^{-1}n^{1-\gamma}|\overline{X}_n| = a_n^{-1}n^{\frac{1}{\beta}-\gamma}|n^{-\frac{1}{\beta}}S_n| \\ \Rightarrow\ &\mathbb{E}\big(a_n^{-1}n^{1-\gamma}|\overline{X}_n|\big) \le a_n^{-1}n^{\frac{1}{\beta}-\gamma}\mathbb{E}\big(|n^{-\frac{1}{\beta}}S_n|\big) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ \Rightarrow\ &a_n^{-1}n^{1-\gamma}|\overline{X}_n| \xrightarrow{P} 0, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei wir in der zweiten Zeile ausgenutzt haben, dass Konvergenz im Mittel Konvergenz dem Maße nach impliziert, dass $\mathbb{E}(|n^{-1/\beta}S_n|)$ beschränkt ist und dass es laut der Lemmata 3.1.3 und 3.1.11 (S. 96 und 98) eine zum Index $\alpha' > 0$ regulär variierende Funktion $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ gibt mit $f(n) = a_n^{-1}n^{1/\beta-\gamma}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $a_n^{-1}n^{1/\beta-\gamma} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (siehe Satz 3.1.10, S. 98).

Ist $\alpha \in (0,1)$, nutzen wir wieder aus, dass $a_n^{-1}\sum_{i=1}^n |X_i|$ gegen eine α-stabile Zufallsvariable Y konvergiert (s.o.) und erhalten:

$$a_n^{-1}n^{1-\gamma}|\overline{X}_n| \le n^{-\gamma} \cdot a_n^{-1} \sum_{i=1}^n |X_i| \xrightarrow{P} 0. \tag{4}$$

(2): Wir setzen zunächst für $l, n \in \mathbb{N}$

$$V_{l,n} := \max_{0\le k\le n-l} |S_{k+l} - S_k - l\overline{X}_n|.$$

Wir wollen zeigen, dass

$$d\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} \max_{1\le l\le n} l^{-\gamma}V_{l,n} = d\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} \max_{1\le l\le d_n} (l(1-l/n))^{-\gamma}V_{l,n}$$

ist. Es gilt

$$(1-d_n/n)^\gamma \max_{1\le l\le d_n} (l(1-l/n))^{-\gamma}V_{l,n} \le \max_{1\le l\le d_n} l^{-\gamma}V_{l,n} \le \max_{1\le l\le n} l^{-\gamma}V_{l,n}.$$

Setzen wir $\varepsilon_n := 1 - (1 - d_n/n)^\gamma$ so erhalten wir auf der einen Seite

$$(1-\varepsilon_n) \max_{1\le l\le d_n} (l(1-l/n))^{-\gamma} V_{l,n} \le \max_{1\le l\le n} l^{-\gamma} V_{l,n},$$

wobei $\varepsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Weiterhin ist

$$(1-l/n)^{-\gamma} \le 2^\gamma \quad \textit{für alle } l \le d_n \le n/2. \tag{\textbf{5}}$$

Aus dieser Ungleichung sowie Teil *(1)* aus Theorem 3.3.1 auf Seite 113 folgern wir

$$\varepsilon_n a_n^{-1} \max_{1\le l\le d_n} (l(1-l/n))^{-\gamma} V_{l,n} \le 2^\gamma \varepsilon_n \cdot a_n^{-1} \max_{1\le l\le n} l^{-\gamma} V_{l,n} \xrightarrow{P} 0.$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\max_{1\le l\le n} l^{-\gamma} V_{l,n} \le \max_{1\le l\le d_n} (l(1-l/n))^{-\gamma} V_{l,n} + \max_{d_n<l\le n} l^{-\gamma} V_{l,n},$$

wobei

$$\max_{d_n<l\le n} l^{-\gamma} V_{l,n} \le \max_{d_n<l\le n} \big(\max_{0\le k\le n-l} l^{-\gamma} |S_{k+l} - S_k|\big) + \max_{d_n<l\le n} l^{1-\gamma} |\overline{X}_n|.$$

Wir zeigen, dass die rechten beiden Summanden dem Maße nach gegen das Nullmaß konvergieren: Es ist

$$\max_{d_n<l\le n} l^{1-\gamma} |\overline{X}_n| \le \begin{cases} a_n^{-1} n^{1-\gamma} |\overline{X}_n|, & \textit{falls } \gamma \in (0,1), \\ a_n^{-1} |\overline{X}_n|, & \textit{falls } \gamma \in (1,\infty). \end{cases}$$

Mit Hilfe von **(1)** bis **(4)** gilt also

$$\max_{d_n<l\le n} l^{1-\gamma} |\overline{X}_n| \xrightarrow{P} 0.$$

Ist $\delta > 0$, $2 \le h \in \mathbb{N}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $d_n \ge h$ für alle $n \ge n_0$, so gilt nach Teil *(2)* von Lemma 3.3.2 auf Seite 113 für alle $n \ge n_0$:

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} P\big[a_n^{-1} \max_{d_n<l\le n} \max_{0\le k\le n-l} l^{-\gamma} |S_{k+l} - S_k| > \delta\big] \\ \le &\limsup_{n\to\infty} P\big[a_n^{-1} \max_{h<l\le n} \max_{0\le k\le n-l} l^{-\gamma} |S_{k+l} - S_k| > \delta\big] \overset{h\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Also $a_n^{-1} \max_{d_n<l\le n} \max_{0\le k\le n-l} l^{-\gamma} |S_{k+l} - S_k| \xrightarrow{P} 0$ und daher

$$a_n^{-1} \max_{d_n<l\le n} l^{-\gamma} V_{l,n} \xrightarrow{P} 0. \tag{\textbf{6}}$$

Somit ist Teil *(2)* des Lemmas bewiesen.

(3): Wir werden zeigen, dass

$$d\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} \max_{1\le l\le d_n} (l(1-l/n))^{-\gamma} V_{l,n} = d\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} \max_{1\le l\le \frac{n}{2}} (l(1-l/n))^{-\gamma} V_{l,n}$$

ist. Da $d/n < n/2$ für alle $n \ge 2$, gilt offenbar für diese n:

$$\begin{aligned} \max_{1\le l\le d_n} (l(1-l/n))^{-\gamma} V_{l,n} &\le \max_{1\le l\le \frac{n}{2}} (l(1-l/n))^{-\gamma} V_{l,n} \\ &\le \max_{1\le l\le d_n} (l(1-l/n))^{-\gamma} V_{l,n} + \max_{d_n\le l\le \frac{n}{2}} (l(1-l/n))^{-\gamma} V_{l,n}. \end{aligned}$$

Es ist also hinreichend, zu zeigen, dass

$$a_n^{-1} \max_{d_n \le l \le \frac{n}{2}} (l(1-l/n))^{-\gamma} V_{l,n} \xrightarrow{P} 0.$$

Da nach Ungleichung **(5)**

$$a_n^{-1} \max_{d_n \le l \le \frac{n}{2}} (l(1-l/n))^{-\gamma} V_{l,n} \le 2^{\gamma} \cdot a_n^{-1} \max_{d_n \le l \le \frac{n}{2}} l^{-\gamma} V_{l,n},$$

folgt die gewünschte Konvergenz sofort aus **(6)**.

(4): Es bleibt noch nachzuweisen, dass gilt

$$d\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} \max_{1 \le l \le \frac{n}{2}} (l(1-l/n))^{-\gamma} V_{l,n} = d\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n^{-1} \max_{1 \le l < n} (l(1-l/n))^{-\gamma} V_{l,n}.$$

Da

$$\max_{1 \le l < n} (l(1-l/n))^{-\gamma} V_{l,n} = \max\Big\{ \max_{1 \le l \le \frac{n}{2}} (l(1-l/n))^{-\gamma} V_{l,n},\ \max_{\frac{n}{2} < l < n} (l(1-l/n))^{-\gamma} V_{l,n} \Big\}$$

reicht es aus, zu zeigen, dass

$$a_n^{-1} \Delta_n := a_n^{-1} \max_{\frac{n}{2} < l < n} (l(1-l/n))^{-\gamma} \max_{0 \le k \le n-l} |S_{k+l} - S_k - l\overline{X}_n| \xrightarrow{P} 0.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
|S_{k+l} - S_k - l\overline{X}_n| &= \Big| \sum_{i=k+1}^{k+l} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n-l}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \Big| \\
&= \Big| -\sum_{i=1}^{k} X_i - \sum_{i=k+l+1}^{n} X_i + \frac{k}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n-k-l}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \Big| \\
&= \Big| -\sum_{i=1}^{k} (X_i - \overline{X}_n) - \sum_{i=k+l+1}^{n} (X_i - \overline{X}_n) \Big| \\
&= \Big| \sum_{i=1}^{k} (X_i - \overline{X}_n) + \sum_{i=k+l+1}^{n} (X_i - \overline{X}_n) \Big| \\
&\overset{u.i.v.}{\overset{d}{=}} \Big| \sum_{i=k+1}^{k+n-l} (X_i - \overline{X}_n) \Big|.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\Delta_n \overset{d}{=} \max_{\frac{n}{2} < l < n} (l(1-l/n))^{-\gamma} \max_{0 \le k \le n-l} \Big| \sum_{i=k+1}^{k+n-l} (X_i - \overline{X}_n) \Big|.$$

Führen wir nun den Indexwechsel $l' := n - l$ aus, so gilt

$$\frac{n}{2} < l < n \ \Leftrightarrow 0 < l' < \frac{n}{2}, \quad \text{sowie} \quad (l(1-l/n))^{-\gamma} = (l'(1-l'/n))^{-\gamma}$$

und demnach

$$\Delta_n \stackrel{d}{=} \Delta_n^* := \max_{1\le l'<\frac{n}{2}} (l'(1-l'/n))^{-\gamma} \max_{0\le k\le l'} \Big| \sum_{i=k+1}^{k+l'} (X_i - \overline{X}_n) \Big|.$$

Mithilfe der Abschätzung

$$\max_{0\le k\le l'} |S_{k+l'} - S_k| \le \max_{1\le k\le l'} |S_{k+l'}| + \max_{1\le k\le l'} |S_k| \le \max_{1\le k\le 2l'} |S_k| + \max_{1\le k\le l'} |S_k| \le 2 \max_{1\le k\le 2l'} |S_k|$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
a_n^{-1}\Delta_n^* = &\le 2a_n^{-1} \max_{1\le l'<\frac{n}{2}} (l'(1-l'/n))^{-\gamma} \Big(\max_{0\le k\le 2l'} |S_k| \;+\; l'|\overline{X}_n| \Big) \\
&\le 2^{\gamma+1} a_n^{-1} \Big(\Big(\max_{1\le l'<\frac{n}{2}} l'^{-\gamma} \max_{0\le k\le 2l'} |S_k| \Big) + \Big(\max_{1\le l'<\frac{n}{2}} l'^{1-\gamma} |\overline{X}_n| \Big) \Big) \\
&\le \Big(2^{\gamma+1} a_n^{-1} \max_{1\le l'<\frac{n}{2}} \max_{0\le k\le 2l'} |l'^{-\gamma} S_k| \Big) \;+\; \Big(2^{\gamma+1} a_n^{-1} \max_{1\le l'<\frac{n}{2}} l'^{1-\gamma} |\overline{X}_n| \Big) \\
&\le \Big(2^{2\gamma+1} \cdot a_n^{-1} \max_{1\le k\le n} |k^{-\gamma} S_k| \Big) \;+\; \Big(2^{\gamma+1} \cdot a_n^{-1} \max_{1\le l'\le n} l'^{1-\gamma} |\overline{X}_n| \Big)
\end{aligned}$$

Es gilt

$$a_n^{-1} \max_{1\le l'\le n} l'^{1-\gamma} |\overline{X}_n| \le \begin{cases} a_n^{-1} n^{1-\gamma} \max_{1\le l'\le n} |\overline{X}_n|, & \textit{falls } \gamma \in (0,1) \\ a_n^{-1} |\overline{X}_n|, & \textit{falls } \gamma \in (1,\infty). \end{cases}$$

In Teil *(1)* dieses Satzes wurde bereits gezeigt, dass diese Zufallsvariablen gegen das Nullmaß konvergieren (siehe **(1)** bis **(4)** auf S.131 f.). Es bleibt also zu zeigen

$$a_n^{-1} \max_{1\le k\le n} |k^{-\gamma} S_k| \xrightarrow{P} 0.$$

Ist $\gamma > 1$, so gilt mit der gleichen Argumentation wie bei **(2)**

$$\begin{aligned}
a_n^{-1} \max_{1\le k\le n} |k^{-\gamma} S_k| = a_n^{-1} \max_{1\le k\le n} |k^{-(\gamma-1)} \overline{X}_k| &\le n^{-(\gamma-1)} \cdot a_n^{-1} \max_{1\le k\le n} |\overline{X}_k| \\
&\le n^{-(\gamma-1)} \cdot a_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} |X_k| \xrightarrow{P} 0.
\end{aligned}$$

Ist $\gamma \in (0,1)$ und $\alpha > 1$, wählen wir $\beta = 2$, falls $\alpha \ge 2$ und $\beta \in \big((\frac{1}{\alpha} + \gamma)^{-1}, \alpha \big)$, falls $\alpha \in (1,2)$. Dann gilt in beiden Fällen $\gamma > \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|n^{1/\beta} S_n|) < \infty$ (siehe Voraussetzung bzw. Satz 3.3.3 auf Seite 114). Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
&a_n^{-1} \max_{1\le k\le n} |k^{-\gamma} S_k| = a_n^{-1} \max_{1\le k\le n} k^{-\gamma+\frac{1}{\beta}} |k^{-\frac{1}{\beta}} S_k| \le a_n^{-1} \max\big\{1, n^{-\gamma+\frac{1}{\beta}}\big\} \max_{1\le k\le n} |k^{-\frac{1}{\beta}} S_k| \\
\Rightarrow\ &\mathbb{E}\Big(a_n^{-1} \max_{1\le k\le n} |k^{-\gamma} S_k| \Big) \le a_n^{-1} \max\big\{1, n^{-\gamma+\frac{1}{\beta}}\big\} \underbrace{\mathbb{E}\big(\max_{1\le k\le n} |k^{-\frac{1}{\beta}} S_k| \;\big)}_{\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|n^{-\frac{1}{\beta}} S_n|) < \infty} \xrightarrow{P} 0,
\end{aligned}$$

denn gemäß den Lemmata 3.1.3 und 3.1.11 (S.96 und 98) gibt es eine zum Index $\alpha' > 0$ regulär variierende Abbildung $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mit $f(n) = a_n^{-1} \max\big\{1, n^{-\gamma+1/\beta}\big\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

und somit $a_n^{-1}\max\{1, n^{-\gamma+1/\beta}\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (siehe Satz 3.1.10, S. 98). Da Konvergenz im Mittel Konvergenz dem Maße nach impliziert gilt also $a_n^{-1}\max_{1\le k\le n}|k^{-\gamma}S_k| \overset{P}{\longrightarrow} 0$.

Abschließend seien nun α und $\gamma \in (0,1)$: Es gilt

$$a_n^{-1}\max_{1\le k\le n}|k^{-\gamma}S_n| \le a_n^{-1}\max_{1\le k<\sqrt{n}} k^{-\gamma}\sum_{i=1}^{k}|X_i| \;+\; a_n^{-1}\max_{\sqrt{n}\le k\le n} k^{-\gamma}\sum_{i=1}^{k}|X_i|.$$

Betrachten wir nun die einzelnen Summanden: Da X_i und somit auch $|X_i|$ regulär zum Index $\alpha \in (0,1)$ variiert gilt $a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|X_i| \overset{d}{\longrightarrow} Y_\alpha$ für eine Zufallsvariable Y_α mit α-stabiler nicht-entarteter Verteilung (siehe Korollar 3.1.20 auf Seite 102). Demnach gilt einerseits

$$a_n^{-1}\max_{\sqrt{n}\le k\le n} k^{-\gamma}\sum_{i=1}^{n}|X_i| \le n^{-\frac{\gamma}{2}}\cdot a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|X_i| \overset{P}{\longrightarrow} 0,$$

andererseits ist

$$\begin{aligned} a_n^{-1}\max_{1\le k<\sqrt{n}} k^{-\gamma}\sum_{i=1}^{k}|X_i| &\le a_n^{-1}\max_{1\le k<\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{k}|X_i| = \max_{1\le k<\sqrt{n}}\frac{a_{n\cdot\frac{k}{n}}}{a_n}a_k^{-1}\sum_{i=1}^{k}|X_i| \\ &\le \frac{a_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{a_n}\cdot\underbrace{a_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}^{-1}\sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}|X_i|}_{\overset{d}{\longrightarrow}Y_\alpha}. \end{aligned}$$

Laut Lemma 3.1.11 auf Seite 98 gibt es eine monoton wachsende, zum Index $-1/\alpha$ regulär variierende Abbildung $f:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mit $f(n) = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $a_n \nearrow \infty$ gilt für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und alle $n \ge \varepsilon^{-2}$

$$0 \le \frac{a_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{a_n} \le \frac{a_{\lfloor\varepsilon n\rfloor}}{a_n} \le \frac{f(\varepsilon n)}{f(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Demnach ist $\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{a_n} \le \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$ für alle $\varepsilon > 0$ und somit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{a_n} = 0.$$

Zusammenfassend ergibt sich die Konvergenz von $a_n^{-1}\max_{1\le k<\sqrt{n}} k^{-\gamma}\sum_{i=1}^{k}|X_i|$ und damit auch $a_n^{-1}\max_{1\le k\le n}|k^{-\gamma}S_k|$ dem Maße nach gegen 0. □

Zusammenfassend erhalten wir aus Lemma 3.3.7

$$d\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}\max_{1\le l<n}\max_{0\le k\le n-l}\left|\frac{S_{k+l}-S_k}{l^\gamma}\right| = d\text{-}\lim_{n\to\infty} a_n^{-1}\max_{1\le l\le n}\max_{0\le k\le n-l}\left|\frac{S_{k+l}-S_k-l\overline{X}_n}{(l(1-\frac{l}{n}))^\gamma}\right|$$

und nach Satz 2.1.21 auf Seite 46 folgt somit auch die Konvergenz der jeweiligen Verteilungsfunktionen. Damit ist Teil *(2)* des Satzes von Mikosch und Račkauskas bewiesen ■

Über den Inhalt dieser Arbeit hinausgehend haben Mikosch und Račkauskas in ihrer Arbeit [Mikosch & Račkauskas] die asymptotische Verteilung von Teststatistiken für einseitige Strukturbruchprobleme mit epidemischen Alternativen behandelt. Zum Abschluss dieser Arbeit sei an dieser Stelle ihr diesbezügliches Ergebnis kurz vorgestellt:

3.3.8 Theorem ***(Satz von Mikosch und Račkauskas für einseitige Testprobleme)***
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge unabhängig identisch verteilter reeller zum Index* α *regulär variierender Zufallsvariablen. Es seien weiterhin*

$$S_k := \sum_{i=1}^{k} X_i \quad \textit{und} \quad \overline{X}_n := n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

sowie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *die Normierungsfolge*

$$b_n := \inf\Big\{x \in \mathbb{R} \;\Big|\; P[|X_1| \le x] \ge 1 - \frac{1}{n}\Big\}.$$

Ist entweder

- $\alpha \in (0,1)$ *und* $\gamma > 0$,
- $\alpha \in (1,\infty)$, $\gamma > \max\{0, \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\}$, $\mathbb{E}(X_i) = 0$

oder

- $\alpha = 2$, $\gamma > 0$, $\mathbb{E}(X_i) = 0$ *sowie* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|n^{-\frac{1}{\beta}} S_n|) < \infty$ *für alle* $\beta \in (0,2)$,

so gilt für alle $x > 0$*:*

(1)

$$P\Big[b_n^{-1}\min_{1\le l\le n}\min_{0\le k\le n-l}\frac{S_{k+l}-S_k}{l^\gamma} \le -x,\; b_n^{-1}\max_{1\le l\le n}\max_{0\le k\le n-l}\frac{S_{k+l}-S_k}{l^\gamma} \le y\Big] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(-x^{-\alpha}),$$

(2)

$$P\Big[b_n^{-1}\max_{1\le l<n}\max_{0\le k\le n-l}\frac{S_{k+l}-S_k-l\overline{X}_n}{(l(1-\frac{l}{n}))^\gamma} \le x\Big] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(-x^{-\alpha}).$$

(Zum Beweis dieses Theorems siehe [Mikosch & Račkauskas] S. 17.)

Literaturverzeichnis

[de Acosta & Giné] de Acosta, Alejandro und Giné, Evarist: Convergence of Moments and Related Functionals in the General Central Limit Theorem in Banach Spaces. In: Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, S. 213-231

[Bauer, 1990] Bauer, Heinz: Maß- und Integrationstheorie - Berlin, New York 1990

[Bauer, 1991] Bauer, Heinz: Wahrscheinlichkeitstheorie. 4., völlig überarb. und neugestaltete Aufl. - Berlin, New York 1991

[Behrends, 2004] Behrends, Ehrhard: Analysis. Band 2 - Wiesbaden, 2004

[Billingsley, 1968] Billingsley, Patrick: Convergence of Probability Measures - New York, London, Sydney, Toronto 1968

[Billingsley, 1995] Billingsley, Patrick: Probability and Measure. 3rd ed - New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore 1995

[Davis & Resnick, 1985] Davis, Richard und Resnick, Sidney: Limit Theory for Moving Avarages of Random Variables with Regularly Varying Tail Probabilities. In: The Annals of Probability 1985 Vol. 13 No. 1 (1985), S. 179-195

[Dehling & Haupt, 2004] Dehling, Herold und Haupt, Beate: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie. 2. Auflage - Berlin, Heidelberg 2004

[Elstrodt, 2009] Elstrodt, Jürgen: Maß- und Integrationstheorie. 6., korrigierte Auflage - Berlin, Heidelberg 2009

[Feller, 1971] Feller, William: An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Band 2, 2. Auflage - New York, London, Sydney, Toronto 1971

[Kallenberg, 1975] Kallenberg, Olav: Random Measures - Berlin 1975

[Klenke, 2008] Klenke, Achim: Wahrscheinlichkeitstheorie. Zweite, korrigierte Auflage - Berlin, Heidelberg 2008

[Ledoux & Talagrand, 1991] Ledoux, Michel und Talagrand, Michel: Probability in Banach Spaces; Isoperimetry and Prozesses. -Berlin, Heidelberg, New York - 1991

[Mikosch & Račkauskas] Mikosch, Thomas und Račkauskas, Alfredas: The Limit Distribution of the Maximum Increment of a Heavy-Tailed Random Walk. Preprint. Online im Internet unter http://www.math.ku.dk/ mikosch/preprint.html [Stand:09.04.2009]

[Resnick, 1987] Resnick, Sidney I.: Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes - New York, Berlin, Heidelberg 1987

[Querenburg, 2001] Querenburg, Boto von: Mengentheoretische Topologie. 3., neu bearb. und erw. Aufl. - Berlin, Heidelberg, New York 2001

Notation

a_n	ab Kapitel 3: $a_n := \inf\{x \mid P(\|X_1\| > x) \leq n^{-1}\}$ *(S.97)*
$C_b(E)$	Raum der stetigen und beschränken Funktionen auf E *(S.43)*
$C_b^+(E)$	Raum der nichtnegativen, stetigen und beschränken Funktionen auf E *(S.43)*
$C_K(E)$	Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf E *(S.43)*
$C_K^+(E)$	Raum der nichtnegativen stetigen Funktionen mit kp. Träger auf E *(S.43)*
d-lim	Grenzwert bezüglich Konvergenz in Verteilung *(S.45)*
d_2	$d_2(x,y) := \left(\sum_{i=1}^h (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ für $x, y \in \mathbb{R}^h$
$d(x, A)$	$:= \inf\{d(x,a)\|a \in A\}$ Abstand des Punktes $x \in X$ zur Menge $A \subset X$ bezüglich einer Metrik d *(S.13)*
$d(A, B)$	$:= \inf\{d(a,b)\|a \in A,\ b \in B\}$ Abstand zwischen zwei Mengen $A, B \subset X$ bezüglich einer Metrik d *(S.13)*
$d(A)$	$:= \sup\{d(a,b)\|a, b \in A\}$ Durchmesser einer Menge A bezüglich einer Metrik d *(S.13)*
δ_p	Diracmaß: $\delta_p[A] = 1$, falls $p \in A$, $\delta_p[A] = 0$ sonst *(S.84)*
$\mathbf{e}_i$	i-ter Einheits-„Vektor“ *(S.104)*
f^+	die Abbildung nach $\mathbb{R}_0^+$ mit $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ *(S.53)*
f^*	die Abbildung $M_+(E) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,\ \mu \longmapsto \langle f, \mu\rangle$ *(S.50)*
$\langle f, \mu\rangle$	$\int_E f\ d\mu$ *(S.50)*
f.s.	fast sicher; eine Aussage gilt auf einer Menge, deren Komplement eine Nullmenge ist *(S.44)*
f.ü.	fast überall oder äquivalent fast sicher; siehe f.s.
$\mathbb{I}$	Indikatorfunktion, dabei ist $\mathbb{I}_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A$, $\mathbb{I}_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin A$ bzw. $\mathbb{I}_{\{[Aussage]\}} = 1 \Leftrightarrow [Aussage]$ *ist wahr*, $\mathbb{I}_{\{[Aussage]\}} = 0 \Leftrightarrow [Aussage]$ *ist unwahr.*
kp.	kompakt *(S.17)*
$\mathcal{L}_{(\ldots)}$	Laplace-Transformierte *(S. 74, 78)*
$\mathfrak{L}(E)$	Raum der Zufallsvariablen auf $(E, \mathcal{E})$ *(S.42)*
$\mathfrak{L}^p$	Raum der Zufallsvariablen $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mit beschränkten p-ten absoluten Momenten *(S.124)*
$M_1(E)$	Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(E, \mathfrak{B}(E))$ *(S.42)*
$M_{\leq 1}(E)$	Raum der Sub-Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(E, \mathfrak{B}(E))$ *(S.42)*
$M_f(E)$	Raum der endlichen Maße auf $(E, \mathfrak{B}(E))$ *(S.42)*
$M_+(E)$	Raum der Radon-Maße auf $(E, \mathfrak{B}(E))$ *(S.43)*
$\mathfrak{M}_+(E)$	σ-Algebra auf $M_+(E)$ *(S.68)*
$\mathbb{N}$	die natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	$:= \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\overline{\mathbb{N}}$	$:= \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
$\overline{\mathbb{N}}_0$	$:= \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$
$\mathcal{O}(f(n))$	$:= \{g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{R}_0 : \frac{g(n)}{f(n)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} k\}$
$Par(\alpha; x_0)$	Pareto-Verteilung mit Parametern α und x_0 *(S.1)*
$Poisson(\vartheta)$	Poisson-Verteilung zum Index ϑ *(S.74)*

$PPP\mu$	Poisson'scher Punktprozess zum Intensitätsmaß μ *(S.87)*
π_i	Projektionsabbildung auf die i-te Koordinate *(S.28)*
$\mathbb{R}$	die reellen Zahlen
$\mathbb{R}^h$	$:= \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (h mal)
$\mathbb{R}_0$	$:= \mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\mathbb{R}^+$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
$\mathbb{R}^-$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
$\mathbb{R}_0^+$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
$\overline{\mathbb{R}}$	$:= \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$
$\overline{\mathbb{R}}_0^+$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \cup \{\infty\}$
$\widehat{\mathbb{R}^h}$	die Alexandroff- oder Einpunkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^h$ *(S.18)*
$\acute{\mathbb{R}}^h$	$:= \mathbb{R}^h\backslash\{0\} \cup \{p_\infty\}$ *(S.34)*
rel. kp.	relativ kompakt *(S.18)*
$\mathfrak{R}(E)$	$:= \{E \in \mathfrak{B}(E) \vert E \textit{ ist relativ kompakt}\}$ *(S.61)*
$\mathfrak{R}_\mu(E)$	$:= \{E \in \mathfrak{B}(E) \vert E \in \mathfrak{R}(E),\ \mu[\partial E] = 0\}$ für ein Radon-Maß μ *(S.61)*
$\mathfrak{R}_\mu^\circ(E)$	$:= \{E \in \mathfrak{B}(E) \vert E \in \mathfrak{R}(E),\ E \textit{ offen},\ \mu[\partial E] = 0\}$ f.e. Radon-Maß μ *(S.61)*
$\mathfrak{R}_\xi(E)$	$:= \{E \in \mathfrak{B}(E) \vert E \in \mathfrak{R}(E),\ \xi[\partial E] = 0 \textit{ f.s.}\}$ für ein Zufälliges Maß ξ *(S.81)*
$\acute{\mathbb{R}}^+$	$:= \mathbb{R}^+ \cup \{p_\infty\}$
S_k	ab Kapitel 3.3 bezeichnet S_k die Summe $\sum_{i=1}^k X_i$ *(S.113)*
S_f	$:= \overline{f^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})}$ der Träger (engl.: *support*) einer Funktion f *(S.43)*
$\acute{\mathcal{T}}$	die Topologie auf dem Raum $\acute{\mathbb{R}}^h$ *(S.34)*
$\widehat{\mathcal{T}}$	die Topologie eines einpunkt-kompaktifizierten Raumes *(S.18)*
$\mathcal{T}_0$	die relative Topologie von $(\mathbb{R}^h, \mathcal{T}(d_2))$ auf $\mathbb{R}_0$
$\mathcal{T}_{\vert A}$	die relative Topologie bezüglich $\mathcal{T}$ auf einem Teilraum A *(S.16)*
$\mathcal{T}(d)$	die von einer Metrik erzeugte Topologie *(S.13)*
$u.i.v.$	unabhängig identisch verteilt
v-lim	Grenzwert bezüglich vager Konvergenz *(S.45)*
w-lim	Grenzwert bezüglich schwacher Konvergenz *(S.45)*
$\overline{X}_n$	$:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$
$\xrightarrow{d}$	Konvergenz in Verteilung *(S.45)*
$\xrightarrow{L^1}$	Konvergenz im Mittel *(S.44)*
$\xrightarrow{P}$	Konvergenz dem Maße nach (bzgl. P) *(S.44)*
$\xrightarrow{v}$	vage Konvergenz von Maßen *(S.45)*
$\xrightarrow{w}$	schwache Konvergenz von Maßen *(S.45)*
$\nearrow [Menge]$	$A_n \nearrow A \iff A_n \subset A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N} \textit{ und } A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$
$\searrow [Menge]$	$A_n \searrow A \iff A_n \supset A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N} \textit{ und } A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$
$\nearrow [Fkt]$	$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ \forall x$
$\searrow [Fkt]$	$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ \forall x$
$\overset{d}{=}$	Gleichheit in Verteilung *(S.45)*
$\sim$	„…hat die Verteilung…“
$\lfloor\bullet\rfloor$	$:= \sup\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq \bullet\}$ Untere Gaußklammer
$\lceil\bullet\rceil$	$:= \inf\{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq \bullet\}$ Obere Gaußklammer
$\Vert \bullet \Vert_p$	$:= \big(\mathbb{E}(\vert \bullet \vert^p)\big)^{\frac{1}{p}}$ *(S.124)*; in den Abschnitten vor Abschnitt 3.3 bezeichnet $\Vert \bullet \Vert_2$ die euklidische Norm $\Vert x\Vert_2 := (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ *(S.13)*

Index