Historische Einführung

Malik Toprak und Irfan Acun

20.12.2018

Wahrheit und Beweisbarkeit

Abbildung: Gottfried Wilhelm Leibniz, ca. 1700.

Gottfried Wilhelm Leibniz

- 21 juni 1646 in Leipzig geboren
- war ein deutscher Philosoph, Mathematiker, Diplomat, Historiker und politischer Berater der frühen Aufklärung
- gefesselt davon eine Universalsprache zu entwickeln (Characteristica Universalis)
- für diese Sprache soll ein Regelwerk (Calculus Ratiocinator) erschaffen werden, um Wahrheitsgehalt zu berrechnen
- war der Überzeugung das Projekt mit ausgewählten Wissenschaftlern zu verwirklichen
- Chance wurde ihm nie gegeben
- starb im Alter von 70 Jahren am 14 November 1716

Wahrheit und Beweisbarkeit

- im 19. Jahrhundert führten die Fortschritte im Bereich der symbolischen Logik zu der Entwicklung formaler Systeme
- heute besitzen wir die künstliche Sprache der Prädikatenlogik und Aussagenlogik
- bis in das 20.Jahrhundert zweifelte kaum ein Mathematiker daran, dass für jede mathematische Aussage ein Beweis oder Gegegenbeweis gefunden werden kann
- heute wissen wir, dass sich der Begriff der Wahrheit und Beweisbarkeit nicht übereinstimmen lassen

Vermutungen

Vermutung 1

Jede gerade natürliche Zahl $n > 2$ lässt sich als Summe zweier Primzahlen schreiben.

Vermutung 2

Es existiert unendlich viele Zahlen n mit der Eigenschaft, dass n und $n + 2$ Primzahlen sind.

Auf den Spuren der Unendlichkeit

- die moderne Mathematik hat ihre Wurzeln im 19. Jahrhundert
- einheitliche Grundlage der Mathematik ist den präzisesten Wissenschaftlern nicht gelungen
- heute bezeichnen wir diese Grundlage als Mengenlehre
- Jean Baptiste Fourier löste den Anstoß zur Begründung der Mengenlehre
- jede beliebige Funktion lässt sich als trigonometrische Reihe darstellen
- für stetige Funktionen weitgehend bewiesen
- immer mehr Mathematiker gingen dazu über die Ergebnisse auf den unstetigen Fall zu übertragen
- der deutsche Mathematiker Georg Cantor gehörte dazu

Georg Cantor

Abbildung: Georg Cantor, ca.1910

Georg Cantor

- geboren am 3. März 1845 in Sankt Petersburg
- absolvierte sein Studium von 1862 bis 1867 in Zürich, Göttingen und Berlin
- Größen wie Weierstraß, Kummer und Kronecker zählten zu seinen Lehrern
- Begründer der Mengenlehre
- führte die Mathematik in die Moderne, durch die Untersuchung des Unendlichen
- anfangs starker Widerstand (insbesondere Leopold Kronecker)
- erkrankte im Alter von 39 an manischer Deppression
- starb im Alter von 72 Jahren am 6. Januar 1918

Auf den Spuren der Unendlichkeit

- schwächte die Annahme der Stetigkeit schrittweise ab
- zeigte zuerst, dass Fouriers Vermutung auf Funktionen mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen zutrifft
- versuchte seine Ergebnisse auf Funktionen mit unendlich vielen Unstetigkeitsstellen zu übertragen
- man konnte sowohl endliche als auch unendliche Mengen in der gleichen Weise untersuchen
- der Schlüssel für den Umgang mit dem Unendlichen liegt in der Betrachtung der Mächtigkeit
- sie wird mit $|M|$ bezeichnet und entspricht für endliche Mengen die Anzahl ihrer Elemente

Definition 1.1 (Mächtigkeit)

Definition 1.1

Mit M_1 und M_2 seien zwei beliebige Mengen gegeben. M_1 und M_2 heißen gleichmächtig, geschrieben als

$$|M_1|=|M_2|$$

wenn eine bijektive Abbildung $f : M_1 \to M_2$ existiert. Wir schreiben

$$|M_1| \leq |M_2|$$

wenn eine injektive Abbildung $f : M_1 \to M_2$ existiert.

Auf den Spuren der Unendlichkeit

- Cantor zeigte die Gleichmächtigkeit von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und der Menge der algebraischen Zahlen
- doch seine bedeutsamere Entdeckung war eine andere
- Anzahl der reellen Zahlen übersteigt jene der natürlichen Zahlen so sehr, dass es unmöglich ist eine eins zu eins Zuordnung herzustellen
- Überabzählbarkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Definition 1.2 (Abzählbarkeit, Überabzählbarkeit)

Definition

Eine Menge M heißt

- abzählbar, falls $|M| = |\mathbb{N}|$
- höchstens abzählbar, falls $|M| \leq |\mathbb{N}|$
- überabzählbar, falls $|M| > |\mathbb{N}|$

Auf den Spuren der Unendlichkeit

- Cantors Mengenbegriff wurde von vielen seiner Zeitgenossen abgelehnt und von einigen sogar bekämpft
- dies lässt sich nur im historischen Kontext verstehen
- er schuf seinen Mengenbegriff in einer Zeit, in der die Diskussion um das Wesen der Unendlichkeit in vollem Gange war
- man stritt bezüglich der aktualen Unendlichkeit und der potentiellen Unendlichkeit

Gottlob Frege

- So wie Cantor sah der deutsche Mathematiker Gottlob Frege in der aktual Unendlichkeit den Schlüssel zu einer modernen Mathematik

Abbildung: Gottlob Frege, ca.1878

Gottlob Frege

- geboren am 8 November 1848 in Wismar
- deutscher Logiker, Mathematiker und Philosoph
- zählt zu den Begründern der mathematischen Logik und der analytischen Philosophie
- vertrat die Auffassung, dass die Mathematik ein Teil der Logik sei
- Frege zog sich nach der niederschmetternden Entdeckung der Russell'schen Antinomie zurück
- publizierte keine bedeutenden Arbeiten mehr

Macht der Symbole

- 1879 publizierte Frege sein wichtigstes Werk, die Begriffsschrift
- er schuf das was wir heute als symbolische Logik bezeichnen
- ihm gelang es eine künstliche Sprache zu entwickeln, die ausdrucksstark genug war, um die gesamte gewöhnliche Mathematik zu formalisieren
- man trat seiner Arbeit mit Gleichgültigkeit entgegen

Was war es, die Freges Arbeit so besonders machte ?

- paar Jahre zuvor hatte Georg Bode mit der Aussagenlogik das Grundgerüst erschaffen, um logische Relationen zwischen Elementaraussagen symbolischer Operatoren auszudrücken
- Frege erkannte, dass sich die Aussagenlogik als stark genug entpuppte, um die Struktur der Elementaraussagen selbst zu formulieren und nicht nur die Zusammenhänge zwischen elementaren Aussagen zu beschreiben

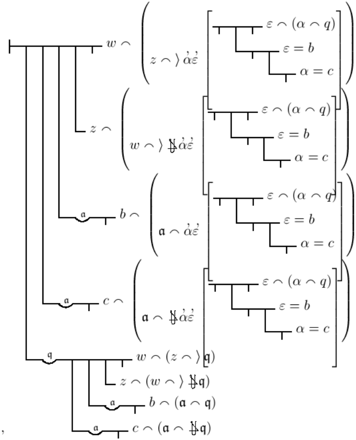
Beispiel (Aussagenlogik)

„Alle Menschen sind sterblich"
Wird in der folgenden Implikationsform dargestellt :
„Für alle x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann ist x sterblich"
Diese Aussage lässt sich auch in der Form
$\forall x(Mensch(x) \rightarrow Sterblich(x))$ oder kürzer als: $\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$
ausdrücken.

Macht der Symbole

- Mit der Begriffsschrift ist es Frege gelungen, dass logische Denken auf eine symbolische Ebene zu heben
- sein Ziel war es sämtliche mathematische Begriffe und Konzepte auf elementare Begriffe der Logik zurückzuführen
- er sah die Logik nicht als Teil der Mathematik, sondern die Mathematik als Teil der Logik
- einen wichtigen Teilerfolg erzielte er im Jahre 1884 mit der Publikation der "Grundlagen der Arithmetik"
- er unternahm den Versuch den Zahlenbegriff formal zu definieren

Freges Begriffsschrift



Grundlagenkrise

- Im Jahre 1902 erhät Frege einen Brief des britischen Mathematikers und Philosophen Bertrand Russell
- Frege erreichte der Brief zu der Zeit, als er den zweiten Band der Grundgesetze der Arithmetik fertigstellte
- Viele Jahre arbeitete er an sein Werk und musste anschließend zusehen, wie sie auf einen Schlag in Trümmern lag
- was er las, hat nicht nur seine Arbeit erschüttert, sondern die gesamte Mathematik in die größte Krise gestürzt
- für große Änderungen war es zu spät
- Was konnte Freges Arbeit so grundlegend erschüttern ?

Bertrand Russel

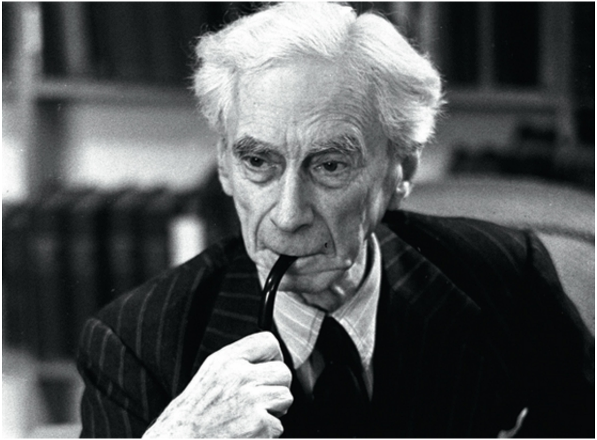


Abbildung: Bertrand Russel, ca.1916

Bertrand Russel

- Bertrand Russel wurde am 18. Mai 1872 in Trellech geboren
- Schon in frühen Jahren wurde Russels einzigartige Begabung für Mathematik und Philosophie sichtbar
- In den Jahren 1890 bis 1894 studierte er Mathematik und lernte in dieser Zeit North Whitehead kennen
- verfasste eine Vielzahl bedeutender Werke über philosophische Themen
- wurde im Jahr 1950 mit den Literaturnobelpreis geehrt
- durch seine literaische Arbeit gelang er zu Weltruhm
- viele Wissen nicht, dass sich hinter dem berühmten Philosophen zugleich einer der größten Mathematiker des 20. Jahrhunderts verbirgt
- starb im Jahre 1970

Grundlagenkrise

- Nach Russels Ansicht musste es durch die geschickte Abwandlung der zugrunde gelegten Axiome möglich sein, genügend Kontrolle über den Mengenbegriff zu erlangen, um die Mathematik von Widersprüchen zu befreien
- er versuchte ein widerspruchsfreies Fundament mit dem Mathematiker Alfred North Whitehead aufzubauen
- Nach zehn Jahren intensiver Arbeit schufen sie die "Principia Mathematica"
- Sie haben somit versucht, alle mathematischen Erkenntnisse aus einer kleinen Menge von Axiomen herzuleiten

Principia Mathematica

360 PROLEGOMENA TO CARDINAL ARITHMETIC [PART II

$*54\cdot42.\ \vdash :: \alpha \epsilon 2 . \supset :. \beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv . \beta \epsilon \iota'' \alpha$

Dem.

$\vdash . *54\cdot4 . \quad \supset \vdash :: \alpha = \iota' x \cup \iota' y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \equiv : \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota' x . \vee . \beta = \iota' y . \vee . \beta = \alpha : \exists ! \beta :$

$[*24\cdot53\cdot56 . *51\cdot161] \quad \equiv : \beta = \iota' x . \vee . \beta = \iota' y . \vee . \beta = \alpha \quad (1)$

$\vdash . *54\cdot25 . \text{Transp} . *52\cdot22 . \supset \vdash : x \neq y . \supset . \iota' x \cup \iota' y \neq \iota' x . \iota' x \cup \iota' y \neq \iota' y :$

$[*13\cdot12] \quad \supset \vdash : \alpha = \iota' x \cup \iota' y . x \neq y . \supset . \alpha \neq \iota' x . \alpha \neq \iota' y \quad (2)$

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash :: \alpha = \iota' x \cup \iota' y . x \neq y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv : \beta = \iota' x . \vee . \beta = \iota' y :$

$[*51\cdot235] \quad \equiv : (\exists z) . z \epsilon \alpha . \beta = \iota' z :$

$[*37\cdot6] \quad \equiv : \beta \epsilon \iota'' \alpha \quad (3)$

$\vdash . (3) . *11\cdot11\cdot35 . *54\cdot101 . \supset \vdash . \text{Prop}$

$*54\cdot43.\ \vdash :. \alpha , \beta \epsilon 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \epsilon 2$

Dem.

$\vdash . *54\cdot26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota' x . \beta = \iota' y . \supset : \alpha \cup \beta \epsilon 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51\cdot231] \quad \equiv . \iota' x \cap \iota' y = \Lambda .$

$[*13\cdot12] \quad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (1)$

$\vdash . (1) . *11\cdot11\cdot35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x , y) . \alpha = \iota' x . \beta = \iota' y . \supset : \alpha \cup \beta \epsilon 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (2)$

$\vdash . (2) . *11\cdot54 . *52\cdot1 . \supset \vdash . \text{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Abbildung: Formaler Beweis der arithmetischen Beziehung 1+1=2

Axiomatische Mengenlehre

Antnomien sollen durch eine präzise Axiomatisierung der Mengenlehre (und ihrer logischen Grundlagen) vermieden werden. Beispiele:

- Cantor (1898, unveröffentlicht)
- Russellsche Typentheorie (1903)
- Ernst Zermelo (1907) sowie Abraham Fraenkel und Thoralf Skolem (1921)
- von Neumann-Bernays-Gödel (1925-1940)
- Morse-Kelley (1949)
  Wir betrachten die moderne Version von Zermelo Fraenkel (ZF)

Semantik von ZF

- die Variablen u, x, y und z stehen für Mengen
- man kann in ZF nur über Mengen reden. Es gibt keine anderen Objekte!
- $(x = y)$ soll bedeuten, dass die beiden Mengen identisch sind
- $(x \in y)$ soll bedeuten, dass die Menge x ein Element der Menge y ist
- $(\varphi \vee \psi)$ soll bedeuten, dass (mindestens) eine der Aussagen $\varphi und \psi$ wahr ist
- $(\neg\varphi)$ soll bedeuten, dass die Aussage φ nicht wahr ist
- $(\exists x \varphi)$ soll bedeuten, dass es (mindestens) eine Menge x gibt, für die φ wahr ist

Paarmengenaxiom

$$\boxed{\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \Longleftrightarrow u = x \vee u = y)}$$

Zu zwei vorgegebenen Mengen gibt es eine Menge, die genau diese beiden Mengen (und keine anderen) enthält.

- diese Menge ist eindeutig bestimmt
- Man nennt sie das ungeordnete Paar oder die Paarmenge von x und y und beschreibt sie als {y,x} oder {x,y}
- gilt $x = y$, so schreibt man einfach {x} und nennt die Menge das Singleton von x

Hilberts Programm und Gödels Beitrag

- In der euklidischen Geometrie ist die Winkelsumme in jedem Dreieck 180° , in der hyperbolischen ist sie immer kleiner als 180°, in der elliptischen immer größer als 180°
- gibt es mehrere mathematische Wahrheiten ?
- In Freges Werk "Grundlagen der Arithmetik", das der ganzen Mathematik ein sicheres Fundament verschaffen sollte, entdeckt Bertrand Russel einen Widerspruch, der auch die Mengenlehre von Cantor betrifft
- Vertraut man noch den mathematischen "Wahrheiten"?

David Hilbert

Abbildung: David Hilbert, ca.1912

David Hilbert

- wurde am 21.1.1862 in Königsberg geboren
- beendete 1884 sein Mathematikstudium
- wechselte mehrmals sein Forschungsscherwerpunkt
- hinterließ seine Spuren in der Geometrie, Zahlentheorie, der Analysis und der theoretischen Physik
- 1900 hielt er auf dem internationalen Kongress der Mathematik seine berühmte Jahrhunderrede
- trug 23 ungelöste Probleme vor
- noch einige sind bis heute noch offen
- starb 1943 im Alter von 81 Jahren

Das Hilbertprogramm

- Metamathematik: Untersuchung der Grundlagen der Mathematik mit mathematischen Methoden
- Ziel: Axiomatisierung der gesamten Mathematik
  - Peano-Arithmetik
  - Hilberts Grundlagen der Geometrie
  - Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre
- Beschränkung auf finite Methoden: Formalismus

Formalismus

- mathematische Aussagen sind Zeichenketten (Strings) in einer gewissen Syntax
- diese Syntax muss von einem Computerprogramm verifiziert werden können.
- Ein Beweis der Aussage φ ist eine Liste von Aussagen
- φ ist die letzte Aussage der Liste
- jede Aussage in der Liste ist ein Axiom
- ... oder folgt aus Aussagen von ihr
- Die Eigenschaften „ist ein Axiom" und "folgt aus"müssen von einem Computerprogramm verifiziert werden können
- Das zusammen nennt man Theorie

Mizar

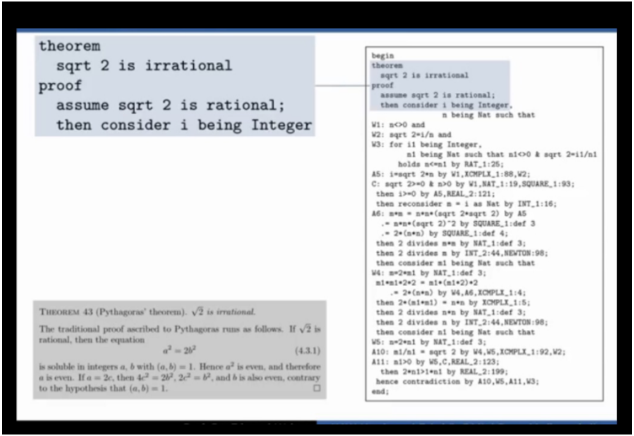


Abbildung: Beweis $\sqrt{2}$ ist irrational

Das Hilbertprogramm

- Metamathematik: Untersuchung der Grundlagen der Mathematik mit mathematischen Methoden
- Ziel: Axiomatisierung der gesamten Mathematik
  - Peano Arithmetik
  - Hilberts Grundlagen der Geometrie
  - Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre
- Beschränkung auf finite Methoden: Formalismus
- Entscheidbarkeit
  Alle mathematischen Beweise sind mechanisch nachvollziehbar
- Wiederspruchsfreihet:
  Man kann keine falschen Aussagen herleiten
- Vollständigkeit:
  Man kann alle wahren Aussagen herleiten

Kurt Gödel

Abbildung: Kurt Gödel ca. 1961

Kurt Gödel

- geboren am 28 April 1906 im österreichisch-ungarischen Brünn
- mit 17 begann er das Studium der theoretischen Physik
- Philipp Furtwänglers Vorlesung über Zahlentheorie lenkte Gödels Interesse auf die Mathematik
- war sich der Machtergreifung Hitlers zunächst nicht bewusst und floh 1940 in die USA
- fand in Albert Einstein einen lebenslangen Freund
- starb am 14. Januar 1978 an einer herbeigeführten Unterernährung, da er an starker paranoia und Depression leidete

Gödels Unvollständigkeitssätze

Erster Unvollständigkeitssatz:

Wenn eine Theorie hinreichend expressiv ist, dann ist sie entweder unvollständig oder nicht widerspruchsfrei

Zweiter Unvollständigkeitssatz:

Wenn eine Theorie hinreichend expressiv und widerspruchsfrei ist, dann kann sie ihre eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen

Proseminar

Gizem Demirel

Januar 2019

Ruhr-Universität-Bochum
Fakultät für Mathematik
Prof.Dr.Christoph Thäle

Wintersemester 2018/19

1 Strukturen und Formeln

Definition 1.1 Eine *Struktur* ist ein Paar $\mathfrak{A} = (A, J)$, wobei A eine nicht-leere Menge und J eine Familie von Elementen aus A, Operationen und Relationen auf A ist.

Beispiele 1.1.1
Im Allgemeinen sind beliebige positive Stelligkeiten von Relationen und Operationen möglich. Allerdings sind nicht alle Gegenstände der Mathematik Strukturen. Im Folgenden haben wir jeweils ein Beispiel zu einer Struktur und keiner Struktur:
· Eine Gruppe $(G, e, \circ, ^{-1})$ ist eine Struktur. Sie besteht aus einer Menge G sowie ein- und zweistelligen Operationen.
· Ein topologischer Raum ist keine Struktur, da er aus offenen Teilmengen einer Grundmenge besteht.

Definition 1.2 Eine *Sprache* ist eine Menge von Konstanten, Funktionszeichen und Relationszeichen. Funktionszeichen und Relationszeichen haben eine (positive) Stelligkeit.

Beispiele 1.2.1
· Die Gruppen-Sprache $L_G = \{e, \circ, ^{-1}\}$, bestehend aus einer Konstante sowie einem ein- und zweistelligen Funktionszeichen.
· Die Sprache der natürlichen Zahlen $L_N = \{0, S, +, \cdot, <\}$, bestehend aus einer Konstanten, ein- und zweistelligen Funktionszeichen sowie aus einem zweistelligen Relationszeichen.
· Die Mengenlehre-Sprache $L_{Me} = \{\in\}$, bestehend aus einem zweistelligen Relationszeichen.

Definition 1.3 Sei L eine Sprache. Eine *L-Struktur* ist ein Paar
$\mathfrak{A} = (A, (Z^{\mathfrak{A}})_{Z \in L})$, wobei

A eine nicht-leere Menge ist,
$Z^{\mathfrak{A}} \in A$, wenn Z eine Konstante ist,
$Z^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$, wenn Z ein n-stelliges Funktionszeichen ist, und
$Z^{\mathfrak{A}} \subset A^n$, wenn Z ein n-stelliges Relationszeichen ist.

$Z^{\mathfrak{A}}$ ist also eine Interpretation der Zeichen von L in A.

Definition 1.4 Zwei L-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen *isomorph*, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn es einen *Isomorphismus* $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ gibt, eine Bijektion $F : A \to B$, die mit den Interpretationen der Zeichen aus L kommutiert:

· $F(Z^{\mathfrak{A}}) = Z^{\mathfrak{B}}$ (Z ist eine Konstante aus L)

· $F(Z^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)) = Z^{\mathfrak{B}}(F(a_1, ..., a_n))$ (Z ist ein n-stelliges Funktionszeichen aus $L, a_1, ..., a_n \in A$)

· $Z^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow Z^{\mathfrak{B}}(F(a_1, ..., F(a_n))$ (Z ist ein n-stelliges Relationszeichen aus $L, a_1, ..., a_n \in A$)

Definition 1.5 Ein $L - Term$ ist eine Zeichenfolge, die nach den folgenden Regeln gebildet ist:

T1 Jede Variable ist ein L-Term.
T2 Jede Konstante aus L ist ein L-Term.
T3 Wenn f ein n-stelliges Funktionszeichen aus L ist und wenn $t_1, ..., t_n$ L-Terme sind, dann ist auch $ft_1...t_n$ ein L-Term.

Beispiel 1.5.1
Wir benutzen Klammern, um Terme besser lesbar zu machen. Als Beispiel kann $(x + y) \cdot (z + w)$ zu $\cdot + xy + zw$ umgeschrieben werden.

Im folgendem Lemma wird gezeigt, weshalb man auf Klammern verzichtet kann:

Lemma 1.6 (Eindeutige Lesbarkeit von Termen)
Für jeden L-Term t tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein:

1. t ist eine Variable,
2. t ist eine Konstante,
3. $t = ft_1...t_n$, wobei f ein n-stelliges Funktionszeichen und $t_1, ..., t_n$ L-Terme sind.

Im letzten Fall sind f und $t_1, ..., t_n$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Es muss einer der drei Fälle eintreten. Nun ist die Eindeutigkeit der t_i zu zeigen. Wenn $t = es_1...s_m$ für ein m-stelliges Funktionszeichen e und Terme s_i, dann gilt $e = f$ und $m = n$. Dass $s_i = t_i$, folgt aus dem nächsten Hilfssatz. □

Hilfssatz 1.6.1 *Kein L-Term ist echtes Anfangsstück eines anderen L-Terms*

Beweis: Behauptung: Sei s Anfangsstück von t.
Wir zeigen nun durch Induktion über den Aufbau von t, dass $s = t$ gilt. Wenn t eine Variable oder eine Konstante ist, ist die Behauptung klar. Sonst ist $s = fs_1...s_n$ und $t = ft_1...t_n$ für ein n-stelliges Funktionszeichen f. Wenn $s \neq t$, dann gibt es einen kleinsten Index i mit $s_i \neq t_i$. Dann ist s_i ein echtes Anfangsstück von t_i oder t_i ein echtes Anfangsstück von s_i, was nach der Induktionsvoraussetzung nicht möglich ist. □

Definition 1.7 Die folgenden Ausdrücke sind L-Formeln:

F1 $t_1 \doteq t_2$, wenn t_1, t_2 L-Terme sind,
F2 $Rt_1, ..., t_n$, wenn R ein n-stelliges Relationszeichen aus L und $t_1, ..., t_n$ L-Terme sind,
F3 $\neg\psi$, wenn ψ eine L-Formel ist,
F4 $(\psi_1 \wedge \psi_2)$, wenn ψ_1 und ψ_2 L-Formeln sind,
F5 $\exists x\ \psi$, wenn ψ eine L-Formel und x eine Variable ist.

Jede L-Formel ensteht auf diese Weise.

Beispiel 1.7.1
Als Beispiel schreiben wir in L_G die Körperaxiome auf:
1. $\forall x, y \quad x + y \doteq y + x$
2. $\forall x \quad x + 0 \doteq x$
3. $\forall x \quad x + (-x) \doteq 0$
4. $\forall x, y, z \quad (x + y) + z \doteq x + (y + z)$

Das erste Axiom kann zum Beispiel ausgeschrieben
$\neg\exists v_0 \neg\neg\exists v_1 \neg + v_0v_1 \doteq + v_1v_0$
sein.

Lemma 1.8 (Eindeutige Lesbarkeit von Formeln)
Für jede L-Formel φ tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

1. $\varphi = t_1 = t_2$ für L-Terme t_1, t_2
2. $\varphi = Rt_1...t_n$ für ein n-stelliges Relationszeichen R aus L und L-Terme $t_1, ..., t_n$
3. $\varphi = \neg\psi$ für eine L-Formel ψ
4. $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ für L-Formeln ψ_1 und ψ_2
5. $\varphi = \exists x\, \psi$ für eine L-Formel ψ und eine Variable x

In jedem der Fälle sind die Terme t_i, das Relationszeichen R, die Formeln ψ, ψ_1, ψ_2 und die Variable x jeweils eindeutig bestimmt.

Beweis: Es muss einer der fünf Fälle eintreten. Sie treten ein je nachdem, ob das erste Zeichen von φ in Fall 1 eine Variable, Konstante oder Funktionszeichen ist, in Fall 2 ein Relationszeichen, in Fall 3 ein Negationszeichen, in Fall 4 eine aufgehende Klammer oder in Fall 5 ein Existenzquantor ist. Wir müssen noch in jedem Einzelfall die Eindeutigkeit der Zerlegung zeigen:
Fall 1: Klar, weil in φ nur ein Gleichzeitszeichen vorkommt.
Fall 2: R ist als das erste Zeichen von φ eindeutig bestimmt. Die Eindeutigkeit der t_i folgt aus dem Hilfssatz im Beweis der Eindeutigen Lesbarkeit von Termen.
Fall 3: Klar.
Fall 4: Wenn $(\psi_1 \wedge \psi_2) = (\psi_1' \wedge \psi_2')$, ist ψ_1 ein Anfangsstück von ψ_1' oder umgekehrt. Aus dem nächsten Hilfssatz folgt $\psi_1 = \psi_1'$ und $\psi_2 = \psi_2'$.
Fall 5: Klar. □

Hilfssatz 1.8.1 *Keine L-Formel ist echtes Anfangsstück einer anderen L-Formel*

Beweis: φ und φ' seien L-Formeln und φ ein echtes Anfangsstück von φ'. Wir zeigen durch Induktion über den Aufbau von φ', dass dies nicht möglich ist. Es ist klar, dass für φ und φ' derselbe Fall auftritt. Wir gehen alle fünf Fälle durch:
Fall 1: Wenn $\varphi = t_1 \doteq t_2$ und $\varphi' = t_1' \doteq t_2'$, ist t_2 ein echtes Anfangsstück von t_2', was nach dem Hilfssatz im Beweis der Eindeutigen Lesbarkeit von Termen nicht geht.
Fall 2: Wenn $\varphi = Rt_1...t_n$ und $\varphi' = Rt_1'...t_n'$, gibt es ein kleinstes i mit $t_i \neq t_i'$. Dann ist t_i ein echtes Anfangsstück von t_i' oder umgekehrt, was unmöglich ist.

Fall 3: Wenn $\varphi = \neg\psi$ und $\varphi' = \neg\psi'$, ist ψ echtes Anfangsstück von ψ', was nach der Induktionsannahme nicht möglich ist.
Fall 5: $\varphi = \exists x\, \psi$ ist aus demselben Grund unmöglich.
Fall 4: Wenn $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ und $\varphi' = (\psi_1' \wedge \psi_2)$, ist ψ_1 Anfangsstück von ψ_1' oder umgekehrt. woraus nach Induktionsannahme folgt, dass beide gleich sind. Also muss ψ_2 ein echtes Anfangsstück von ψ_2' sein. Das widerspricht der Induktionsannahme. $\square$

Semantik - Proseminar

Andrea Kaupmann

04. Januar 2019

Contents

1 Einleitung

Diese Ausarbeitung bezieht sich auf das zweite Kapitel des Buches Mathematische Logik von Martin Ziegler in der 2. Auflage. Die Definitionen, Sätze und Beweise orientieren sich am Aufbau von Termen und Formeln, wie sie im Kapitel davor definiert werden. Somit bilden die beiden folgenden Definitionen eine Grundlage für diese Ausarbeitung.

Definition von L-Termen Ein L-Term ist eine Zeichenfolge,für die folgendes gilt:
1)Jede Variable ist ein L-Term.
2)Jede Konstante ist ein L-Term.
3)Für ein n-stelliges Funktionszeichen f und die L-Terme $t_1...t_n$, ist $t = ft_1...t_n$ auch L-Term.

Definition von L-Formeln Die folgenden Ausdrücke sind L-Formeln
1) $t_1 \doteq t_2$, wenn t_1, t_2 L-Formeln sind.
2) $Rt_1...t_n$, wenn R ein n-stelliges Relationszeichen ist und $t_1, ..., t_n$.
3) $\neg\psi$, wenn ψ eine L-Formel ist.
4) $(\psi_1 \wedge \psi_2)$, wenn ψ_1, ψ_2 L-Formeln sind.
5) $\exists x\psi$, wenn ψ eine L-Formel und x eine Variable ist.

Hier heißen die ersten beiden Primformeln oder atomare Formeln.

2 Belegung

2.1 Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine L-Struktur. Dann ist eine Belegung eine Funktion

$$\beta : \{v_0, v_1, ...\} \to A$$

von der Menge der Variablen in die Gundmenge von $\mathcal{A}$.
Rekusiv kann man nun auch die Belegung für alle Termen definieren. Nun bezieht man sich auf den Satz zur eindeutigen Lesbarkeit von Termen.

Definition Seien L-Terme t, L-Strukturen $\mathcal{A}$ und Belegungen β gegeben. Hierfür defininieren wir $t^{\mathcal{A}}[\beta]$ durch:

$$v_i^{\mathcal{A}}[\beta] = \beta(v_i), \text{ falls } t = v_i \tag{1}$$

$$c^{\mathcal{A}}[\beta] = c^{\mathcal{A}}, \text{ falls } t = c \tag{2}$$

$$ft_1...t_n^{\mathcal{A}}[\beta] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[\beta], ..., t_n^{\mathcal{A}}[\beta]), \text{ falls } t = ft_1...t_n \tag{3}$$

2.2 Lemma über die Belegung von Termen

Wenn die Belegungen β und γ auf den in t vorkommenden Variablen übereinstimmt, gilt

$$t^{\mathcal{A}}[\beta] = t^{\mathcal{A}}[\gamma]$$

Beweis Sei $\mathcal{A}$ eine L-Struktur, t ein L-Term und seien β und γ Belegungen auf $\mathcal{A}$, die auf den Variablen übereinstimmen.
1) t ist eine Variable,
also nach Definition mit $t = v_i$ damit

$$v_i^{\mathcal{A}}[\beta] = \beta(v_i) = \gamma(v_i) = v_i^{\mathcal{A}}[\gamma]$$

2) t ist Konstante,

$$c^{\mathcal{A}}[\beta] = c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}}[\gamma]$$

3) t ist ein n-stelliges Funktionenzeichen mit $t = ft_1...t_2$ und $t_1, .., t_n$ L-Terme, somit sind $t_1, ..., t_n$ wegen der Eindeutigkeit der L-Terme Konstanten, Variablen oder n-stellige Funktionenzeichen.

$$\begin{aligned} f(t_1^{\mathcal{A}}[\beta], ..., t_n^{\mathcal{A}}[\beta]) &= f(t_1^{\mathcal{A}}[\gamma], ..., t_n^{\mathcal{A}}[\gamma]) \\ \text{mit } t_1^{\mathcal{A}}[\beta] &= t_1^{\mathcal{A}}[\gamma], ..., t_n^{\mathcal{A}}[\beta] = t_n^{\mathcal{A}}[\gamma] \\ &\Rightarrow t^{\mathcal{A}}[\beta] = t^{\mathcal{A}}[\gamma] \end{aligned}$$

Falls die t_i Konstanten oder Variablen sind, gilt 1) oder 2), für den Fall, dass t_i ein n-stelliges Funktionenzeichen ist, zerlegt man dieses wieder, sodass man einen Ausdruck aus Variablen und Konstanten erhält. $\square$

3 Semantik

3.1 Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine L-Struktur. Nun Definieren wir für die Belegung β und die L-Formeln φ die Relation $A \models \varphi[\beta]$ durch Rekursion über den Aufbau von φ

$$\mathcal{A} \models t_1 \doteq t_2[\beta] \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{A}}[\beta] = t_2^{\mathcal{A}}[\beta] \tag{1}$$

$$\mathcal{A} \models Rt_1...t_n[\beta] \Leftrightarrow R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[\beta], ..., t_n^{\mathcal{A}}[\beta]) \tag{2}$$

$$\mathcal{A} \models \neg\varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \varphi[\beta] \tag{3}$$

$$\mathcal{A} \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi_1 \text{und} \mathcal{A} \models \varphi_2 \tag{4}$$

$$\mathcal{A} \models \exists x\varphi[\beta] \Leftrightarrow \text{ es gibt genau ein } a \in A \text{ mit } \mathcal{A} \models \varphi[\beta\frac{a}{x}] \tag{5}$$

Dabei ist $\beta\frac{a}{x}(y) = \begin{cases} \beta(y) & \text{wenn } y \neq x \\ a & \text{wenn } y = x \end{cases}$
Nun hängt es von den freien Variablen in φ ab, ob φ in $\mathcal{A}$ auf β zutrifft. Wir brauchen also die folgende Definition:

Definition Die Variable x kommt frei in der Formel φ vor, wenn sie an einer Stelle vorkommt, die nicht im Wirkungsbereich eines Quantors $\exists x$ liegt. Definiert durch Rekursion nach dem Aufbau von φ bedeutet das

$$x \text{ frei in } t_1 \doteq t_2 \Leftrightarrow x \text{ kommt in } t_1 \text{ oder } t_2 \text{ vor} \tag{1}$$

$$x \text{ frei in } Rt_1...t_n \Leftrightarrow x \text{ kommt in einem der } t_i \text{ vor} \tag{2}$$

$$x \text{ frei in } \neg\psi \Leftrightarrow x \text{ frei in } \psi \tag{3}$$

$$x \text{ frei in } (\psi_1 \wedge \psi_2) \Leftrightarrow x \text{ frei in } \psi_1 \text{ oder in } \psi_2 \tag{4}$$

$$x \text{ frei in } \exists y\psi \Leftrightarrow x \neq y \text{ und } x \text{ frei in } \psi \tag{5}$$

3.2 Koinzidenzsatz

Wenn β und γ an allen Variablen, die frei in φ vorkommen, übereinstimmen ist

$$\mathcal{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\gamma]$$

Beweis Wir beweisen diesen Satz, indem wir eine Induktion über den Aufbau von φ durchführen, dass heißt man zeigt die Behauptung für die Primformeln und folgt daraus durch die Gültigkeit des Satzes für Teilformeln die Gültigkeit für alle Formeln.

Für die Primformeln, also $t_1 \doteq t_2$ und $Rt_1...t_2$, wenn $t_1,..,t_n$ L-Terme sind und R ein n-stelliges Relationszeichen, folgt dieser Satz aus dem Lemma über die Belegung von Termen.

Die Variable $x \in \varphi(\beta)$ sei freie Variable und die Belegungen β und γ stimmen in dieser freien Variablen überein.

i) Für die Negation
Da gilt $x \in \varphi \Leftrightarrow x \in \neg\varphi$, kann man folgern, dass x auch in $\neg\varphi$ frei ist. Mit dem Lemma für die Belegung von Termen und da $\mathcal{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\gamma]$, gilt auch

$$\mathcal{A} \models \neg\varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \neg\varphi[\gamma]$$

ii) Für die Konjunktion
Setze nun $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$, so ist also x frei in ψ_1 oder in ψ_2
Also kann man nun schreiben

$$\mathcal{A} \models \psi_1[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi_1[\gamma] \text{ und}$$
$$\mathcal{A} \models \psi_2[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi_2[\gamma]$$

damit folgt nach Definition mit $\mathcal{A} \models \psi_1[\gamma]$ und $\mathcal{A} \models \psi_2[\gamma] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\gamma]$

$$\mathcal{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[\gamma]$$

iii) Sei nun $\varphi = \exists x\psi$ und $\mathcal{A} \models \psi[\beta\frac{a}{x}] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi[\gamma\frac{a}{x}]$
Dann gilt nach Defnition

$$\mathcal{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \text{es gibt genau ein } a \in A \text{ mit } \mathcal{A} \models \psi\left[\beta\frac{a}{x}\right]$$

somit haben φ und ψ die gleichen freien Variablen bis auf x und so folgt mit

$$\mathcal{A} \models \varphi[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\gamma]$$

□

Definition Eine Aussage φ ist eine Formel ohne freie Variablen. Wir schreiben $\mathcal{A} \models \varphi$, wenn $\mathcal{A} \models \varphi[\beta]$ für ein (alle) β. Man sagt
φ gilt in $\mathcal{A}$
φ ist wahr in $\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$ ist Modell von φ
$\mathcal{A}$ erfüllt φ

Man nennt zwei L-Strukturen elementar äquivalent, wenn die gleichen Aussagen in ihnen gelten.

Definition Sei nun x eine Variable und s ein Term, dann ensteht
$t\frac{s}{x}$ aus dem Term t durch Ersetzen aller x durch s
$\varphi\frac{s}{x}$ aus φ durch Ersetzen aller x, die frei vorkommen, durch s.

Rekursiv kann man nun $\varphi\frac{s}{x}$ definieren durch

$$(t_1 \doteq t_2)\frac{s}{x} = t_1\frac{s}{x} \doteq t_2\frac{s}{x} \tag{1}$$

$$(Rt_1 ... t_n)\frac{s}{x} = Rt_1\frac{s}{x} ... t_n\frac{s}{x} \tag{2}$$

$$(\neg\psi)\frac{s}{x} = \neg\left(\psi\frac{s}{x}\right) \tag{3}$$

$$(\psi_1 \wedge \psi_2)\frac{s}{x} = \left(\psi_1\frac{s}{x} \wedge \psi_2\frac{s}{x}\right) \tag{4}$$

$$(\exists y\psi)\ \frac{s}{x} = \exists y\left(\psi\frac{s}{x}\right),\ \text{wenn } x \neq y \tag{5}$$

$$= \exists y\psi,\ \text{wenn } x = y$$

Definition x ist frei für s in φ, falls $\varphi\frac{s}{x}$ keine Variablen in den eingesetzten Termen s gebunden ist.

Rekursiv definiert man nun: x ist frei für s in φ, wenn x nicht frei in φ ist oder wenn x frei in φ ist und einer der folgenden Fälle zutrifft

$$\varphi = t_1 \doteq t_n, \tag{1}$$

$$\varphi = Rt_1 ... t_n, \tag{2}$$

$$\varphi = \neg\psi \text{ und } x \text{ frei für } s \text{ in } \psi \tag{3}$$

$$\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2) \text{und } x \text{ frei für } s \text{ in } \psi_1 \text{ und } \psi_2 \tag{4}$$

$$\varphi = \exists y\psi, x \text{ frei für } s \text{ in } \psi \text{ und } y \text{ kommt nicht in } s \text{ vor.} \tag{5}$$

3.3 Substitutionslemma

Sei x eine Variable, s ein Term und β eine Belegung mit Werten in der Struktur $\mathcal{A}$

1) Für jeden Term ist

$$\left(t\frac{s}{x}\right)^{\mathcal{A}}[\beta] = t^{\mathcal{A}}\left[\beta\frac{s^{\mathcal{A}}[\beta]}{x}\right]$$

2) Für jede Formel φ ist

$$\mathcal{A} \models \varphi\frac{s}{x}[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi\left[\beta\frac{s^{\mathcal{A}}[\beta]}{x}\right]$$

falls x frei für s in φ

Beweis Zu 1)
Der Beweis ist über die Eindeutigkeit der Terme zu führen und muss somit auf drei verschiedene Fälle geführt werden.
i) Für t ist eine Konstante folgt direkt

$$t^{\mathcal{A}}(\beta) = t^{\mathcal{A}}(\beta)$$

ii) Für t ist eine Variable gibt es zwei Fälle:
für $t = x$

$$s^{\mathcal{A}}[\beta] = s^{\mathcal{A}}[\beta]$$

für $t \neq x$

$$t^{\mathcal{A}}(\beta) = t^{\mathcal{A}}(\beta)$$

iii) Für $t = ft_1...t_n$ folgt dann aus i) und ii)

$$\begin{aligned} \left(t\frac{s}{x}\right)^{\mathcal{A}}[\beta] &= f^{\mathcal{A}}\left(\left(t_1\frac{s}{x}\right)^{\mathcal{A}}[\beta] ... \left(t_n\frac{s}{x}\right)^{\mathcal{A}}[\beta]\right) \\ &= f^{\mathcal{A}}\left(t_1^{\mathcal{A}}\left[\beta\frac{s^{\mathcal{A}}[\beta]}{x}\right] ... t_n^{\mathcal{A}}\left[\beta\frac{s^{\mathcal{A}}[\beta]}{x}\right]\right) \\ &= t^{\mathcal{A}}\left[\beta\frac{s^{\mathcal{A}}[\beta]}{x}\right] \end{aligned}$$

Zu 2)
Wir führen den Beweis als eine Induktion über den Aufbau einer L-Formel φ
Für die Primformel $t_1 \doteq t_2$ und $Rt_1...t_2$ folgt die Behauptung direkt aus dem ersten Teil des Lemmas.

Für die Negation setzt man $\varphi = \neg\psi$, dann gilt $x \in \varphi \Leftrightarrow x \in \neg\psi$
Also auch $\varphi\frac{s}{x}[\beta] = \neg\psi\frac{s}{x}[\beta]$ damit folgt dann auch

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \neg\psi\frac{s}{x}[\beta] &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi\frac{s}{x}[\beta] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi\left[\beta\frac{s^{\mathcal{A}}[\beta]}{x}\right] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \neg\psi\left[\beta\frac{s^{\mathcal{A}}[\beta]}{x}\right] \end{aligned}$$

Für die Konjunktion gilt, wenn x in $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ frei ist, dann ist x frei in ψ_1 oder in ψ_2 Mit der Vorraussetzung folgt also

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)\frac{s}{x}[\beta] &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \left(\psi_1\frac{s}{x} \wedge \psi_2\frac{s}{x}\right)[\beta] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi_1\frac{s}{x}[\beta] \text{ oder } \mathcal{A} \models \psi_2\frac{s}{x}[\beta] \\ \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi_1\left[\beta\frac{s^{\mathcal{A}}[\beta]}{x}\right] &\text{ oder } \mathcal{A} \models \psi_2\left[\beta\frac{s^{\mathcal{A}}[\beta]}{x}\right] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)\left[\beta\frac{s^{\mathcal{A}}[\beta]}{x}\right] \end{aligned}$$

Nun sei $\varphi = \exists y \psi$
Dann ist $y \neq x$ und weil x für s frei in der Formel φ ist, kommt y nicht in s vor.
OBdA setze $b = s^{\mathcal{A}}[\beta]$ und wähle ein a beliebig

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models \varphi \frac{s}{x}[\beta] &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi \frac{s}{x} \left[\beta \frac{a}{x}\right] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi \left[\beta \frac{a}{y} \frac{s^{\mathcal{A}}\left[\beta \frac{a}{y}\right]}{x}\right] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi \left[\beta \frac{a}{y} \frac{b}{x}\right] \text{ mit } b = s^{\mathcal{A}}\left[\beta \frac{a}{y}\right] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi \left[\beta \frac{b}{x} \frac{a}{y}\right] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi \left[\beta \frac{b}{x}\right] \\
&\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi \left[\beta \frac{s^{\mathcal{A}}[\beta]}{x}\right]
\end{aligned}$$

$\square$

Allgemeingültige Formeln

Thomas Tsianakas und Sefer Oflazoglu

04.01.2019

Definition

Eine Sprache L ist eine Menge von Konstanten, Funktionszeichen und Relationszeichen.

Definition

Eine Sprache L ist eine Menge von Konstanten, Funktionszeichen und Relationszeichen.

Definition

Jede Variable und Konstante ist ein L-Term. Sei f ein n-stelliges Funktionszeichen und t_1 ,...,t_n L-Terme, dann sind auch f $t_1 \ldots t_n$ L-Terme

Definition

Eine Sprache L ist eine Menge von Konstanten, Funktionszeichen und Relationszeichen.

Definition

Jede Variable und Konstante ist ein L-Term. Sei f ein n-stelliges Funktionszeichen und t_1 ,...,t_n L-Terme, dann sind auch f t_1...t_n L-Terme

Definition

Eine L-Formel entsteht, wenn $n \geq 2$ L-Terme in Relation stehen. Die Negation, Konjunktion und Disjunktion von L-Formeln sind L-Formeln.

Definition

Sei φ eine Aussage. A_1,...,A_n bezeichnen die in φ vorkommenden Variablen. Dann heißt jede Abbildung $\beta : \{A_1, ..., A_\mathrm{n}\} \longrightarrow$ A eine Belegung von φ.
Ein Spezialfall ist die Interpretation $I : M \longrightarrow \{w, f\}$

Definition

Sei φ eine Aussage. A_1,...,A_n bezeichnen die in φ vorkommenden Variablen. Dann heißt jede Abbildung $\beta : \{A_1, ..., A_n\} \longrightarrow$ A eine Belegung von φ.
Ein Spezialfall ist die Interpretation $I : M \longrightarrow \{w, f\}$

Definition

Eine L-Struktur ist ein Paar $\mathcal{U}$=(A, $(Z^{\mathcal{U}})_{Z \in L}$) bestehend aus einer Grundmenge und einer Menge aller Konstanten, Funktionszeichen und Relationszeichen.

Definition

Sei φ eine Aussage. A_1,...,A_n bezeichnen die in φ vorkommenden Variablen. Dann heißt jede Abbildung $\beta : \{A_1, ..., A_n\} \longrightarrow$ A eine Belegung von φ.
Ein Spezialfall ist die Interpretation $I : M \longrightarrow \{w, f\}$

Definition

Eine L-Struktur ist ein Paar $\mathcal{U}$=(A, $(Z^{\mathcal{U}})_{Z \in L}$) bestehend aus einer Grundmenge und einer Menge aller Konstanten, Funktionszeichen und Relationszeichen.

Definition

Sei φ eine L-Formel und I eine Interpretation. Eine L-Formel ist modellierbar, falls sie in ihrer Interpretation wahr ist.

Definition

Eine L-Formel φ ist allgemeingültig, wenn sie für alle Belegungen modellierbar ist. $\varphi(x_1, ..., x_n)$ ist allgemeingültig, wenn die Aussage $\forall x_1, ..., x_n\ \varphi(x_1, ..., x_n)$ allgemeingültig ist. Wir schreiben hierfür $\models \varphi$

Beispiel: In jeder Menschenmenge gibt es einen, wenn der einen Hut trägt, dann auch alle anderen.

$$\underbrace{\exists x(H(x)}_{=:A} \rightarrow \underbrace{\forall y H(y))}_{=:B}$$

Definition

Eine L-Formel φ ist allgemeingültig, wenn sie für alle Belegungen modellierbar ist. $\varphi(x_1, ..., x_n)$ ist allgemeingültig, wenn die Aussage $\forall x_1, ..., x_n\ \varphi(x_1, ..., x_n)$ allgemeingültig ist. Wir schreiben hierfür $\models \varphi$

Beispiel: In jeder Menschenmenge gibt es einen, wenn der einen Hut trägt, dann auch alle anderen.

$$\underbrace{\exists x(H(x)}_{=:A} \rightarrow \underbrace{\forall y H(y))}_{=:B}$$

A	B	A⟶B
w	w	
w	f	
f	w	
f	f	

Beispiel: In jeder Menschenmenge gibt es einen, wenn der einen Hut trägt, dann auch alle anderen.

$$\underbrace{\exists x(H(x)}_{=:A} \rightarrow \underbrace{\forall y H(y))}_{=:B}$$

1 $\forall y H(y)$ w$\rightarrow$ $H(x)$ w

$H(x) \rightarrow \forall y H(y)$ w

$\exists x(H(x) \rightarrow \forall y H(y))$ w

Beispiel: In jeder Menschenmenge gibt es einen, wenn der einen Hut trägt, dann auch alle anderen.

$$\underbrace{\exists x(H(x)}_{=:A} \rightarrow \underbrace{\forall y H(y))}_{=:B}$$

1 $\forall y H(y)$ w$\rightarrow$ $H(x)$ w

$H(x) \rightarrow \forall y H(y)$ w

$\exists x(H(x) \rightarrow \forall y H(y))$ w

2 $\forall y H(y)$ f$\rightarrow$ $\exists x \neg H(x)$

H(x) f $\rightarrow (H(x) \rightarrow \forall y H(y))$ w

$\exists x(H(x) \rightarrow \forall y H(y))$ w

Beispiel: In jeder Menschenmenge gibt es einen, wenn der einen Hut trägt, dann auch alle anderen.

$$\underbrace{\exists x(H(x)}_{=:A} \rightarrow \underbrace{\forall y H(y))}_{=:B}$$

1 $\forall y H(y)$ w$\rightarrow$ $H(x)$ w

$H(x) \rightarrow \forall y H(y)$ w

$\exists x(H(x) \rightarrow \forall y H(y))$ w

2 $\forall y H(y)$ f$\rightarrow$ $\exists x \neg H(x)$

H(x) f $\rightarrow$ $(H(x) \rightarrow \forall y H(y))$ w

$\exists x(H(x) \rightarrow \forall y H(y))$ w

Wenn alle einen Hut tragen kann jeder der sein, der einen Hut tragen muss, damit auch alle anderen einen Hut tragen. Wenn es einen gibt, der keinen Hut trägt, so ist dieser die Person die einen Hut tragen muss, damit alle einen Hut tragen.

Satz (Erweiterung und Einschränkung)

Sei φ eine L-Formel und K eine Erweiterung von L. Dann ist φ als L-Formel genau dann allgemeingültig, wenn φ als K-Formel allgemeingültig ist.

Satz (Erweiterung und Einschränkung)

Sei φ eine L-Formel und K eine <u>*Erweiterung*</u> *von L. Dann ist φ als L-Formel genau dann allgemeingültig, wenn φ als K-Formel allgemeingültig ist.*

Beweis:(durch Kontraposition)

"$\Rightarrow$" Wenn φ in $\mathcal{U}$=(A,$Z^{\mathcal{U}})_{Z\in K}$ falsch ist, dann auch eingeschränkt in $\mathcal{U} \restriction L = (A, Z^{\mathcal{U}})_{Z\in L}$
"$\Leftarrow$" Wenn φ in $\mathcal{B}$ falsch ist, expandieren wir $\mathcal{B}$ zu einer K-Struktur $\mathcal{U}$, sodass $\mathcal{U} \restriction L = \mathcal{B}$. Dann ist φ auch in $\mathcal{U}$ falsch. $\square$

Satz (Erweiterung und Einschränkung)

Sei φ eine L-Formel und K eine Erweiterung von L. Dann ist φ als L-Formel genau dann allgemeingültig, wenn φ als K-Formel allgemeingültig ist.

Beweis:(durch Kontraposition)

"$\Rightarrow$" Wenn φ in $\mathcal{U}=(\text{A},\text{Z}^{\mathcal{U}})_{\text{Z}\in K}$ falsch ist, dann auch eingeschränkt in $\mathcal{U} \restriction \text{L} = (\text{A},\text{Z}^{\mathcal{U}})_{\text{Z}\in L}$

"$\Leftarrow$" Wenn φ in $\mathcal{B}$ falsch ist, expandieren wir $\mathcal{B}$ zu einer K-Struktur $\mathcal{U}$, sodass $\mathcal{U} \restriction \text{L} = \mathcal{B}$. Dann ist φ auch in $\mathcal{U}$ falsch. $\square$

Beispiel

Sei $\varphi = (1 \leq 2)$, $\mathcal{U}_1 = (\text{A},\text{Z}^{\mathcal{U}})_{\text{Z}\in \mathbb{Z}}$ dann ist φ auch in $\mathcal{U}_2 = (\text{A},\text{Z}^{\mathcal{U}})_{\text{Z}\in \mathbb{N}}$ und $\mathcal{U}_3 = (\text{A},\text{Z}^{\mathcal{U}})_{\text{Z}\in \mathbb{R}}$ allgemeingültig.

Die Formeln $(\varphi \vee \neg\varphi)$ oder $(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$ sind immer wahr.

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \vee \neg\varphi$
w	f	w
f	w	w

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)$	$(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

Die Formeln $(\varphi \vee \neg\varphi)$ oder $(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) \to \psi$ sind immer wahr.

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \vee \neg\varphi$
w	f	w
f	w	w

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$\varphi \wedge (\varphi \to \psi)$	$(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) \to \psi$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

Die Abbildung $\mu : M \to \{W, F\}$ soll folgende Eigenschaften erhalten.

1. $\mu(\neg f) = \neg(\mu(f))$
2. $\mu(f \wedge g) = \mu(f) \wedge \mu(g)$

Dies definieren wir durch folgende Wahrheitstafeln.

$\wedge$	w	f
w	w	f
f	f	f

und

$\neg$	
w	f
f	w

Definition

Eine Tautologie ist eine allgemeingültige Aussage, bei der die Variablen durch L-Formeln ersetzt wurden.

Definition

Eine Tautologie ist eine allgemeingültige Aussage, bei der die Variablen durch L-Formeln ersetzt wurden.

Satz

Tautologien sind allgemeingültig.

Definition

Eine Tautologie ist eine allgemeingültige Aussage, bei der die Variablen durch L-Formeln ersetzt wurden.

Satz

Tautologien sind allgemeingültig.

Beweis: Setze φ in $\mathrm{f} = \mathrm{f}(\mathrm{p}_1,\ldots,\mathrm{p}_\mathrm{n})$. Es folgt für alle Belegungen β:
$\mathcal{U} \models f(\varphi_1, \ldots., \varphi_\mathrm{n})[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{U} \models f(p_1, \ldots., p_\mathrm{n})[\beta]$ □

Satz (Axiome der Gleichheit)

$$\forall x\ x{=}x \qquad \textit{(Reflexivität)}$$
$$\forall x, y\ (x = y \rightarrow y = x) \qquad \textit{(Symmetrie)}$$
$$\forall x, y, z\ (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z) \qquad \textit{(Transitivität)}$$
$$\forall x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n\ (x_1 = y_1 \wedge ... \wedge x_n = y_n \rightarrow fx_1...x_n = fy_1...y_n) \qquad \textit{(Kongruenz)}$$
$$\forall x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n\ (x_1 = y_1 \wedge ... \wedge x_n = y_n \rightarrow (Rx_1...x_n \leftrightarrow Ry_1...y_n)) \qquad \textit{(Kongruenz)}$$

Dabei sind die f n-stellige Funktionszeichen und R die n-stellige Relationszeichen aus L

Historische Entwicklung der mathematischen Gleichheit

Entwicklung des Gleichheitszeichen
-Antike, Mittelalter est egale ausgeschrieben
-1596-1650 ae (180°)lat. aequalis
-Recorde 1557 heutiges Gleichheitszeichen

Historische Entwicklung der mathematischen Gleichheit

Entwicklung des Gleichheitszeichen
-Antike, Mittelalter est egale ausgeschrieben
-1596-1650 ae (180°)lat. aequalis
-Recorde 1557 heutiges Gleichheitszeichen

Entwicklung der Relation
-Leibniz Gesetz

Wenn a=b dann gilt für jede Äquivalenzrelation $\sim$: $a \sim b$

-Extensionalitätsaxiom Dedekind 1888$\rightarrow$
Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre ZF/ZFC

$$\forall A, B : (A = B \leftrightarrow \forall C : (C \in A \leftrightarrow C \in B))$$

Satz ($\exists$ – *Quantorenaxiome*)

Sei φ eine L-Formel, t ein L-Term und x frei für t in φ . Dann ist

$$\varphi\frac{t}{x} \to \exists x\varphi$$

allgemeingültig.

Es ist notwendig x frei für t in φ vorauszusetzen. Dies zeigt uns das Beispiel. Sei $\varphi = \forall y\ y = x$ und $t = y$. Die Aussage $\forall y\ y = y \to \exists x \forall y\ x = y$ ist nicht allgemeingültig.

Satz ($\exists - Quantorenaxiome$)

Sei φ eine L-Formel, t ein L-Term und x frei für t in φ . Dann ist

$$\varphi\frac{t}{x} \to \exists x\varphi$$

allgemeingültig.

Es ist notwendig x frei für t in φ vorauszusetzen. Dies zeigt uns das Beispiel. Sei $\varphi = \forall y\ y = x$ und $t = y$. Die Aussage $\forall y\ y = y \to \exists x \forall y\ x = y$ ist nicht allgemeingültig.

Beweis: Sei β eine Belegung mit Werten in $\mathcal{U}$. Dann folgt aus dem Substitutionslemma.

$$\mathcal{U} \models \varphi\frac{t}{x}[\beta] \to \mathcal{U} \models \varphi[\beta\frac{t^{\mathcal{U}}[\beta]}{x}] \to \mathcal{U} \models \exists x\varphi[\beta]$$

□

Satz (Modus Ponens)

Wenn $\varphi \wedge (\varphi \to \psi)$ *allgemeingültig, dann auch* ψ.
Anders ausgedrückt $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$

Satz (Modus Ponens)

Wenn $\varphi \land (\varphi \to \psi)$ *allgemeingültig, dann auch* ψ.
Anders ausgedrückt $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$

Beispiel: Setze $\varphi \to \psi =$ (Wenn es regnet, wird die Straße nass).
Setze $\varphi =$ (Es regnet). Aus dem Modus Ponens folgt, dass die Straße nass wird.

Satz (Modus Ponens)

Wenn $\varphi \wedge (\varphi \to \psi)$ allgemeingültig, dann auch ψ.
Anders ausgedrückt $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$

Beispiel: Setze $\varphi \to \psi =$ (Wenn es regnet, wird die Straße nass).
Setze $\varphi =$ (Es regnet). Aus dem Modus Ponens folgt, dass die Straße nass wird.

Satz ($\exists$ -Einführung)

Wenn x nicht frei in ψ vorkommt, dann ist mit $\varphi \to \psi$ auch $\exists x \varphi \to \psi$ allgemeingültig.

Satz (Modus Ponens)

Wenn $\varphi \wedge (\varphi \to \psi)$ allgemeingültig, dann auch ψ.
Anders ausgedrückt $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$

Beispiel: Setze $\varphi \to \psi =$ (Wenn es regnet, wird die Straße nass).
Setze $\varphi =$ (Es regnet). Aus dem Modus Ponens folgt, dass die Straße nass wird.

Satz ($\exists$ -Einführung)

Wenn x nicht frei in ψ vorkommt, dann ist mit $\varphi \to \psi$ auch $\exists x\varphi \to \psi$ allgemeingültig.

Beweis: Wenn $\mathcal{U} \models \exists x\varphi[\beta]$, gibt es ein $a \in A$ mit $\mathcal{U} \models \varphi[\beta\frac{a}{x}]$. Ist $\varphi \to \psi$ allgemeingültig, so gilt auch $\mathcal{U} \models \psi[\beta\frac{a}{x}]$. Aus dem Koinzidenzsatz folgt dann $\mathcal{U} \models \psi[\beta]$ □

Grundlagen der Mathematik: Der Gödelsche Vollständigkeitssatz (Teil 1)

Laura Steffan
laura.steffan@rub.de
Ruhr-Universität-Bochum
Dozent: Prof. Dr. Christoph Thäle

04. Januar 2019

Im folgenden Text wird der erste Teil des Gödelschen Vollständigkeitssatzes behandelt. Zu Beginn wird "Der Hilbertkalkül"definiert. Diese Definition zeigt, wenn L eine Sprache ist, wann eine L-Formel beweisbar ist. Eine L-Formel ist beweisbar, wenn sie eines der folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. Sie ist eine Tautologie.
2. Sie ist ein Gleichheitsaxiom.
3. Sie ist ein $\exists$-Quantorenaxiom.
4. Sie ergibt sich aus zwei beweisbaren L-Formeln mit Hilfe der Modus Ponens Regel.
5. Sie ergibt sich mit der $\exists$-Einführungsregel aus einer beweisbaren Formel.

Ist eine Eigenschaft erfüllt, dann ist unsere Schreibweise $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi$. Daraufhin wird der Vollständigkeitssatz aufgeführt, der über das gesamte Kapitel 4 bewiesen wird. Er besagt, dass eine Formel genau dann allgemeingültig ist, wenn diese beweisbar ist. Dafür schreiben wir:

$$\models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{\mathrm{L}} \varphi \tag{1}$$

Daraus folgt, dass $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ unabhängig von der Sprachumgebung ist. Das heißt, dass die Aussage für jede beliebige L-Formel oder K-Erweiterung dieser Formel gilt. Darum verwenden wir später die Notation $\vdash \varphi$.
Für den Beweis des Satzes zeigen wir zunächst die Hinrichtung. Wegen des Lemmas aus Kapitel 3 erfüllt die Menge der allgemeingültigen Sätzen die Eigenschaften des Hilbertkalküls. Somit ergibt sich, dass alle beweisbaren Sätze allgemeingültig sind. Damit die Umkehrung bewiesen werden kann, ergänzen wir Axiome und Regeln durch abgeleitete Axiome und Regeln. Die abgeleiteten Axiome und Regeln lassen sich durch ein Lemma einführen, welches drei Eigenschaften des Hilbertkalküls verschärfen.
Die erste Eigenschaft ist die Aussagenlogik. Diese definiert uns, dass ψ beweisbar ist, falls $(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ beweisbar sind und $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \to \psi$ eine Tautologie ist. Die zweite Regel, die aufgeführt wird, ist die Regel der $\forall$-Quantorenaxiome. Sie besagt, dass $\vdash_{\mathrm{L}} \forall x\varphi \to \varphi\frac{t}{x}$ gilt, wenn x frei für t in φ ist. In der letzten Regel handelt es sich um die $\forall$-Einführung. Sie gibt uns an, falls x nicht frei in φ ist, dass aus der Beweisbarkeit von $\varphi \to \psi$ die Beweisbarkeit von $\varphi \to \forall x\varphi$ folgt. Insbesondere folgt aus der Beweisbarkeit von φ die von $\forall x\psi$. Dieses Lemma lässt sich wie folgt beweisen:
Für die erste Behauptung reicht es aus, wenn nur angenommen wird, dass
$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \to \psi$ beweisbar ist. Wodurch leicht zu Erkennen ist, dass es sich bei

$$((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \to \psi) \quad \to \quad (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\dots(\varphi_n \to \psi)))) \tag{2}$$

um eine Tautologie handelt. Die Regel des Modus Ponens ergibt die Beweisbarkeit von $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\dots(\varphi_n \to \psi)))$. Bei der n-maligen Anwendung von Modus Ponens wird deutlich, dass $\vdash_{\mathrm{L}} \psi$ gilt. Die zweite Behauptung beweisen wir, indem wir das $\exists$-Quantorenaxiom $\neg\varphi\frac{t}{x} \to \exists x\neg\varphi$ aufführen. Es folgt daraus, dass sich aus der allgemeingültigen Formel $(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$ die Tautologie $(\neg\varphi\frac{t}{x} \to \exists x\neg\varphi) \to$

$(\neg\exists x \neg\varphi \;\to\; \varphi\frac{t}{x})$ ergibt. Durch die erneute Anwendung von Modus Ponens gilt $\vdash_{\mathrm{L}}$ $\neg\exists x\neg\varphi \to \varphi\frac{t}{x}$. Durch die Anwendung von Aussagenlogik folgt für die dritte Behauptung, wenn $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \psi$, dass $\vdash_{\mathrm{L}} \neg\psi \to \neg\varphi$.
Die $\exists$-Einführung ergibt $\vdash_{\mathrm{L}} \exists x\neg\psi \to \neg\varphi$ und mit erneuter Anwendung mit Aussagenlogik folgt $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi \to \neg\exists x\neg\psi$.
Wir nehmen für den letzten Teil der Behauptung an, dass ψ beweisbar ist. Daraufhin nehmen wir uns eine Tautologie φ, die x nicht frei enthalten soll. Mit Hilfe der Aussagenlogik ergibt sich, dass $\varphi \to \psi$ beweisbar ist, wodurch die Beweisbarkeit von $\varphi \to \forall x\psi$ gezeigt wird. Durch die letzte Anwendung des Modus Ponens zeigt sich also, dass $\vdash_{\mathrm{L}} \forall x\psi$ gilt.
Das folgende Lemma lässt zu, dass wir uns beim Beweis des Vollständigkeitssatzes auf Aussagen beschränken können. Es gibt uns an, wenn $\varphi(x_1 \dots x_n)$ eine L-Formel, C eine Menge von neuen Konstanten und $c_1 \dots c_n$ eine Folge von paarweise verschiedenen Elementen von C ist, gilt

$$\vdash_{L\cup C} \varphi(c_1 \dots c_n) \quad\Longleftrightarrow\quad \vdash_{\mathrm{L}} \varphi(x_1 \dots x_n). \tag{3}$$

Insbesondere gilt für Aussagen $\vdash_{L\cup C} \varphi \quad\Leftrightarrow\quad \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$.
Im nächsten Schritt führen wir einen L-Beweis von ψ durch, der eine Folge von L-Formeln ist. Diese Folge folgt entweder aus Axiomen oder mit den beiden Regeln aus früheren Formeln, wobei sie bei ψ endet.
Bei der Hinrichtung des Beweises sei nun $B(c_1 \dots c_n)$ ein $L \cup C$-Beweis von $\varphi(c_1 \dots c_n)$. Dabei können wir annehmen, dass die neuen Konstanten, die in dem Beweis auftreten, in $(c_1 \dots c_n)$ aufgelistet sind. Durch das Ersetzen der Konstanten c_i durch y_i, die im Beweis sonst nicht vorkommen, ergibt sich der L-Beweis $B(y_1 \dots y_n)$ von $\varphi(y_1 \dots y_n)$. Das n-malige Anwenden der $\forall$-Einführung ergibt $\forall y_1 \dots y_n \varphi(y_1 \dots y_n)$. Nach der Anwendung von den $\forall$-Quantorenaxiomen
$\forall y_1 \dots y_n \quad \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, y_n) \to \forall y_{i+1}, \dots, y_n \quad \varphi(x_1, \dots, x_n)$, $(i = 1, ..., n)$,
und Aussagenlogik ergibt $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi(x_1, \dots, x_n)$.
Bei dem Beweis der Umkehrung gilt $\vdash_{\mathrm{L}} \; \varphi(x_1, \dots, x_n)$, wobei die Anwendung von $\forall$-Einführung $\vdash_{\mathrm{L}} \forall x_1, \dots, x_n \quad \varphi(x_1, \dots, x_n)$ resultiert. Anschließend lässt sich daraus $\vdash_{L\cup C} \varphi(c_1, \dots, c_n)$ folgern.
Daraufhin lassen sich zwei weitere Definitionen ausführen:

1. Eine L-Theorie T ist eine Menge von L-Aussagen, diese widerspruchsfrei oder konsistent sind, falls es aus T nicht Aussagen von $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ gibt, die sich widersprechen, das heißt, für die $\vdash_{\mathrm{L}} \neg(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Zudem kann man sagen, dass eine Aussage φ genau dann nicht beweisbar ist, wenn $\{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei ist, da $\vdash \varphi \Rightarrow \;\; \vdash \neg\neg\varphi$ und $\vdash \neg(\neg\varphi \wedge \dots \wedge \neg\varphi) \Rightarrow \;\; \vdash \varphi$. Ebenso folgt durch das letzte Lemma, wenn T eine widerspruchsfreie L-Theorie ist, dass T als L∪C-Theorie widerspruchsfrei ist.

2. Ein Modell von T ist eine L-Struktur, in der alle Aussagen aus T gelten.

Der folgende Satz bewirkt für jede Erweiterung K von L, T als K-Theorie widerspruchsfrei ist, der wie folgt lautet: Eine Theorie hat genau dann ein Modell, wenn sie widerspruchsfrei ist.

Der Beweis für die Hinrichtung ist leicht, denn eine Theorie, die ein Modell besitzt, muss nach dem Korrektheitssatz widerspruchsfrei sein. Für die Umkehrung konstruieren wir uns zu einer widerspruchsfreien L-Theorie T ein Modell. Dafür erweitern wir zuerst T zu einer Theorie T*, die wie das vollständige Diagramm einer L-Struktur $\mathcal{U}$: Wir indizieren die Elemente von A mit neuen Konstanten aus einer Menge C

$$A = \{a_c | c \in C\} \tag{4}$$

Dieses vollständige Diagramm ist dann die Menge aller L∪C-Aussagen, die in der L∪C-Struktur $\mathcal{U}$*=$(\mathcal{U}, a_c)_{c \in C}$ gelten. Ebenso ist es durch die folgende Defintion eine vollständige Henkintheorie:

1. Eine L∪C-Theorie T^+ heißt Henkintheorie mit der Konstantenmenge C, falls es zu jeder L∪C-Formel $\varphi(x)$ eine Konstante $c \in C$ enthält mit der Eigenschaft

$$(\exists \varphi(x) \to \varphi(c)) \in T^+. \tag{5}$$

2. Eine K-Theorie T* ist vollständig, falls sie widerspruchsfrei ist und $\varphi \in$ T* oder $\neg\varphi \in$ T* für jede K-Aussage φ.

Im ersten Schritt des Beweises zeigen wir, dass T in einer widerspruchsfreien Henkintheorie T^+ enthalten ist: Dafür sei $\varphi(x)$ eine L-Formel und c die neue Konstante.
Dann gilt T ∪ $\{(\exists x \varphi(x) \to \varphi(c))\}$ ist widerspruchsfrei, denn wenn für eine L-Aussage $\psi \vdash_{L \cup \{c\}} \neg(\psi \wedge (\exists x \varphi(x) \to \varphi(c)))$, folgt mit Aussagenlogik
$\vdash_{L \cup \{c\}} \neg \exists x \varphi(x) \to \neg\psi$ und $\vdash_{L \cup \{c\}} \varphi(c) \to \neg\psi$.
Die letzte Aussage hat jedoch nach der Regel der ∀-Einführung $\vdash_{\mathrm{L}} \exists x \varphi(x) \to \neg\psi$ zur Folge. Insgesamt ergibt sich mit Aussagenlogik $\vdash_{\mathrm{L}} \neg\psi$, wodurch deutlich wird, wenn T widerspruchsfrei ist, kann es keine $\psi_1, \ldots, \psi_n \in$ T mit $\vdash_{L \cup \{c\}} \neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge (\exists x \varphi(x) \to \varphi(c)))$ geben.
Daraus lässt sich folgern, wenn für jede L-Formel $\varphi(x)$ eine eigene Konstante c_φ eingeführt wird, ist die Theorie T_1= T ∪ $\{\exists x \varphi(x) \to \varphi(c_\varphi) | \varphi(x) L - Formel\}$ als L∪C_1-Theorie widerspruchsfrei, wobei $C_1 = \{c_\varphi | \varphi(x) L - Formel\}$ ist. Für jede L∪C_1-Theorie führen wir eine neue Konstante ein und erhalten somit eine L $\cup C_1 \cup C_2$-Theorie T_2. Wir erhalten, wenn weiter so fortgefahren wird, eine Henkintheorie $T^+ = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{T}_i$ mit der Konstantenmenge $C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$.
Daraus ergibt sich das T^+ widerspruchsfrei ist, weil endlich viele Aussagen aus T^+ in einem genügend großen T_i vorkommen und es dementsprechend nicht zum Widerspruch kommt.

Grundlagen der Mathematik: Der Gödelsche Vollständigkeitssatz (Teil 2)

Elisabeth Ziola
elisabeth.ziola@rub.de
Ruhr-Universität Bochum
Dozent: Prof. Dr. Christoph Thäle

04.01.2018

Zuvor wurde der 1. Teil des Gödelsche Vollständigkeitssatzes erläutert. Wir befinden uns gerade beim zentralen Beweis des Gödelschen Vollständigkeitssatzes. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass aus T ist widerspruchsfrei - T besitzt ein Modell folgt. Wir unterteilen den Beweis in drei Schritte: 1.*Schritt*: Wir erweitern T: T $\subseteq$ T$^+$ 2.*Schritt*: T$^+$ lässt sich erweitern zu T* 3.*Schritt*: T* besitzt ein Modell. T ist in T^* enthalten. Da wir bereits den 1.*Schritt* im vorherigen Teil bewiesen haben, beginnen wir nun mit dem nächsten Schritt.

Beweis: 2.*Schritt*: zz. T$^+$ lässt sich erweitern zu T*
Sei φ eine K-Aussage. Dann unterscheidet man zwischen zwei Fällen. T$^+\cup$ $\{\varphi\}$ und T$^+\cup\{\neg\varphi\}$. Dabei ist einer der beiden widerspruchfrei. Durch einen Widerspruchsbeweis kann man annehmen, dass man weder $\{\varphi\}$ noch $\{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei hinzufügen kann. Dann gibt es Aussagen ψ_i , χ_j aus T$^+$
Nehme an, dass man φ nicht hinzufügen kann. Dann muss man $\psi_1 \ldots \psi_n$ hinzugeben mit $\vdash_K(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \neg\varphi)$
Analog: Nehme an, dass man $\neg\varphi$ nicht hinzufügen kann. Dann muss es $\chi_1 \ldots \chi_n$ geben mit $\vdash_K(\chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n \rightarrow \varphi)$.
Mit der Aussagenlogik ergäbe sich $\vdash_K(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \wedge \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_n)$. Daraus folgt, dass T$^+$ nicht widerspruchsrei wäre, sodass T$^+\cup$ $\{\varphi\}$ oder T$^+\cup\{\neg\varphi\}$immer wiederspruchsfrei sind.

Sei K höchstens abzählbar. Man zählt die Aussagen aller K-Aussagen auf: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Man fügt nun abwechselnd φ_i oder $\neg\varphi_i$ hinzu. So kann man die Theorie versollständigen.

Sei nun K überabzählbar. Verwende dafür Zorns Lemma (siehe Satz 10.2). Dieser Satz besagt, dass die Verwendung von widerspruchsfreien K-Theorien erneut widerspruchsfrei ist. Dabei kommt es zu einer maximalen K-Theorie T*. Nun gilt T$^+\subseteq$T*
T$^*\subseteq\{\varphi\}$ ist nur wiederspruchsfrei, wenn $\varphi\in$T* ist. Dabeii sei T* vollständig.
Wenn T* vollständig ist, ist T* deduktiv abgeschlossen. Deduktiv Abgeschlossen bedeutet, dass $\psi_1, \ldots, \psi_n \in$T* ist. Dabei gilt: $\vdash_K(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \varphi)$. Daraus folgt $\varphi\in$T*. Das bedeutet, dass jede Schlussfolgerung schon drinnen liegt.

3.*Schritt*: zz. T* besitzt ein Modell
Eine vollständige HenkingtheorieT^* besteht aus einem Modell aus Konstanten. Das bedeutet: sei $\mathcal{U}^*$ ein Modell: $\mathcal{U}^*$=($\mathcal{U}$,a_c) mit $A = \{a_c \mid c \in C\}$

Beweis der Eindeutigkeit: Sei $\mathcal{B}^*$=($\mathcal{B}$,b_c) ein weiteres Modell aus Konstanten mit $\mathcal{B}\{b_d \mid c \in C\}$. Aus T* ist vollständig folgt, dass T* das vollständige Diagramm von $\mathcal{U}$ ist. $L\cup C$-Aussagen φ gilt:

$$U^* \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in T^* \Leftrightarrow B^* \models \varphi$$

Wegen für c,d $\in$ C

$$a_c = a_d \Leftrightarrow \mathcal{U}^* \models c = d \Leftrightarrow \mathcal{B}^* \models c = d \Leftrightarrow b_c = b_d$$

gibt es durch F(a_c)=b_c eine Bijektion zwischen den Grundstrukturen A und B. A und B müssen die Konstanten aus C beachten:

$$R^{\mathcal{U}}(a_{c_1}, \ldots, a_{c_n}) \Leftrightarrow \mathcal{U}^* \models R(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow \mathcal{B}^* \models R(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow R^{\mathcal{B}}(b_{c_1}, \ldots, b_{c_n})$$

Dies gilt auch für die Funktionszeichen und die Konstantenzeichen f ∈ L:

$$f^{\mathcal{U}}(a_{c_1}, \ldots, a_{c_n}) = a_{c_0} \Leftrightarrow f^{\mathcal{B}}(b_{c_1}, \ldots, b_{c_n}) = b_{c_0}$$

Beweis der Existenz: Damit wir das Modell $\mathcal{U}^*$ annehmen können, müssen wir Elemente a_c, $c \in C$ finden mit

$$a_c = a_d \Leftrightarrow c = d \in T^* \tag{1}$$

(1. Eigenschaft der Definition von L-Formeln: $t_1 = t_2$, wenn t_1, t_2 L-Formeln sind). Das gilt, wenn $c \sim d \in T^*$ eine Äquivalenzrelation ist. Dadurch kann man für a_c die Äquivalenzklasse von c nehmen. Aus dem ersten Gleichheitsaxiom (Reflexivität) und dem $\forall$ -Quantorenaxiom (Lemma 4.1.2) folgt, dass $\vdash_{L \cup C} c = c$. T* ist deduktiv abgeschlossen. durch die Reflxivität folgt $(c = d \wedge d = e \rightarrow c = e) \in T^*$. Nun folgt: c = d ∈ T* und d = e ∈ T*. Insgesamt ergibt sich durch die Reflexivität c = e ∈ T*. Die Symmetrie gilt hier durch das zweite Gleichheitsaxiom.

Nun setze $A = \{a_c \mid c \in C\}$ ein. Man nehme für eine Relation $R \in L$ eine Relation $R^{\mathcal{U}}$ auf A an.

$$R^{\mathcal{U}}(a_{c_1}, \ldots, a_{c_n}) \Leftrightarrow R(c_1, \ldots, c_n) \in T^* \tag{2}$$

Nehme R$^{\mathcal{U}}$ ($a_{c_1}, \ldots, a_{c_n}$) ⇔ R($c_1, \ldots, c_n$) ∈ T* an. Daraus folgt, dass $a_{c_1} = a_{d_1}, \ldots, a_{c_n} = a_{d_n}$. Dabei entsteht aus dem fünften Gleichheitsaxiom (2. Kongruenz) und der deduktiven Abgeschlossenheit: $R(c_1, \ldots, c_n) \in T^*$.

Sei f ein n-stelliges Funktionszeichen aus L. Dann führe die Operation f $^{\mathcal{U}}$ auf A an:

$$f^{\mathcal{U}}(a_{c_1}, \ldots, a_{c_n}) = a_{c_0} \Leftrightarrow f(c_1, \ldots, c_n) \in T^* \tag{3}$$

Für alle c_1, …, c_n lässt sich ein c_0 finden. Aus $\vdash_{L \cup C} f(c_1, \ldots, c_n) = f(c_1, \ldots, c_n)$ mit $\exists$-Quantoraxiom folgt $\vdash_L \exists x f(c_1, \ldots c_n) = x$. T^* ist eine Henkintheorie, d.h. es existiert ein $c_0 \in C$. Dadurch ergibt sich:

$$(\exists x f(c_1, \ldots, c_n) = x \rightarrow f(c_1, \ldots, c_n) = c_0) \in T^*)$$

Mit der deduktiven Abgeschlossenheit folgt also: $f(c_1, \ldots, c_n) \in T^*$.

Zu zeigen sei nun, dass $f(c_1, \ldots, c_n) \in T^*$ eindeutig bestimmt ist und nur von $a_{c_1}, \ldots, a_{c_n}$ abhängig ist.

Wenn $(c_1 = d_1, \ldots, c_n = d_n) \in T^*$, dann ergibt auch $(c_0 = d_0) \in T^*$ und somit seien $(f(c_1, \ldots, c_n) = c_0) \in T^*$ und $(f(d_1, \ldots, d_n) = d_0) \in T^*$.

Konstante Terme werden in $\mathcal{U}^*$ ausgerechnet, welche von T^* vorgegeben werden. d.h: $t^{\mathcal{U}^*} = a_c \Leftrightarrow t = c \in T^*$. Über Induktion zeigt man den Aufbau von t. Wenn zunächst t eine Konstante aus C ist, folgt die Behauptung aus $a_c = a_d \Leftrightarrow c = d \in T^*$. Sei nun t ein Funktionsterm: sei $t = ft_1, \dots, t_n$ und sei $t_i^{\mathcal{U}^*} = a_{c_i}$ gegeben. Durch die Induktionsvorraussetzung ist $t_i = c_i \in T^*$. Aus dem vierten Gleichheitsaxiom folgt, dass

$$t = c \in T^* \Leftrightarrow fc_1, \dots, c_n = c \in T^* \tag{4}$$

Andererseits folgt:

$$t^{\mathcal{U}^*} = a_c \Leftrightarrow f^{\mathcal{U}^*}(a_{c_1}, \dots a_{c_n}) = a_c \Leftrightarrow fc_1, \dots, c_n = c \in T^*$$

Durch diese Induktion kann man nun über den Aufbau der Aussage φ sprechen:

$$\mathcal{U}^* \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in T^*$$

Man unterscheidet nun zwischen fünf Fällen:

1. Fall: Sei $\varphi = t_1 = t_2$ und sei $t_i^{\mathcal{U}^*} = a_{c_i}$ von eben gegeben. Durch $t^{\mathcal{U}^*} = a_c \Leftrightarrow t = c \in T^*$ gilt $t_i = c_i \in T^*$ für ein $i = 1, 2$

$$\mathcal{U}^* \models \varphi \Leftrightarrow a_{c_1} = a_{c_2} \Leftrightarrow c_1 = c_2 \in T^* \Leftrightarrow t_1 = t_2 \in T^*$$

2. Fall: Sei $\varphi = R\ t_1 \dots t_n$ d.h sei φ eine Relation und sei $t_i^{\mathcal{U}^*} = a_{c_i}$ von eben gegeben. Durch $t^{\mathcal{U}^*} = a_c \Leftrightarrow t = c \in T^*$ gilt $t_i = c_i \in T^*$ für ein $i = 1, \dots, n$

$$\mathcal{U}^* \models \varphi \Leftrightarrow Rc_1 \dots c_n \in T^* \Leftrightarrow \varphi \in T^*$$

3. Fall: Sei $\varphi = \neg\psi$. Da T^* vollständig ist, gilt $\mathcal{U}^* \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{U}^* \not\models \psi \Leftrightarrow \psi \notin T^* \Leftrightarrow \varphi \in T^*$

4. Fall: Sei $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$. Dann folgt durch die deduktive Abgeschlossenheit von T^*

$$\mathcal{U}^* \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{U}^* \models \psi_i (i = 1, 2) \Leftrightarrow \psi_i \in T^* (i = 1, 2) \Leftrightarrow \varphi \in T^*$$

5. Fall: Sei $\varphi = \exists x\psi$. Durch die deduktive Abgeschlossenheit aus T^* folgt $\exists x\psi \in T^*$, wenn $\psi(c) \in T^*$ für ein $c \in C$.

Andersherum sei es, wenn $\exists x\psi \in T^*$ und $\exists x\psi \to \psi c \in T^*$ gilt. So folgt $\psi(c) \in T^*$ $\Rightarrow \mathcal{U}^* \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{U}^* \models \psi[a_c]$ für ein $c \in C \Leftrightarrow \mathcal{U}^* \models \psi(c)$ für ein $c \in C$ bzw. $\Rightarrow \mathcal{U}^* \models \varphi \Leftrightarrow$ $\psi(c) \in T^*$ für ein $c \in C \Leftrightarrow \varphi \in T^*$

Die Behauptug wurde somit bewiesen.

$\square$

Definition: Sei T eine L-Theorie und φ eine L-Aussage.

1) φ ist in T *beweisbar* , $T \vDash \varphi$, wenn es Axiome $\psi_1 \dots \psi_n$ aus T gibt für die $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \to \varphi$ beweisbar ist.

2) φ *folgt logisch* aus T: $T \models \varphi$, wenn φ in allen Modellen von T gilt.

Folgerung: $T \to \varphi \Leftrightarrow T \models \varphi$

Folgerung (Kompaktheitssatz): Man spricht bei einer Theorie von einem Modell, wenn jede endliche Teilmenge ein Modell hat.

Folgerung (Löwenheim - Skolem): Wenn ein eine Theorie ein Modell besitzt mit einer höchst abzählbaren Sprache besitzt, dann hat sie ein höchst abzählbares Modell.

Literatur: Ziegler, M.: "Mathematische Logik". 2. Auflage, Birkhäuser, 2017

Axiome der Mengenlehre I

Grundlagen der Mathematik

Lisa Michajlova 108017211116

4. Januar 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Motivation

Das Ziel des 20. Jahrhunderts in der Mathematik war dessen Axiomatisierung. Man glaubte lange Zeit, dass wenn eine Wissenschaft konsistent und auf die kleinsten Bausteine zurückzuführen ist, dann ist es die Mathematik. Mit der Formalisierung der klassischen Logik durch Gottlob Frege[1] ist ein bedeutender Grundstein gelegt worden. Es bestand der Wunsch, alle Sätze der Mathematik vollständig abzuleiten aus wenigen Grundannahmen.
Wäre eine solche Struktur möglich, könnte man nach endlich vielen Schritten jede Aussage der Mathematik beweisen oder widerlegen. Dies ist im Allgemeinen unter Hilberts Programm zu verstehen. Um 1930 zerbrach jene Wunschvorstellung durch Kurt Gödel[2] und seine Unvollständigkeitssätze. Nun befasst sich diese Ausarbeitung nicht mit den logischen Schlüssen, den Theoremen und dessen Beweisbarkeit, sondern mit den Grundannahmen - den Axiomen. In der Mathematik, in der jeder Ausdruck so präzise und rigoros definiert wird, ist man sich über eines uneinig: *Was ist eine Menge*? Häufig stocken angehende oder auch fortgeschrittene Mathematiker bei dieser Definition und man nimmt Georg Cantors[3] bildliche Beschreibung:

Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.[2]

Wie kann man das Konstrukt einer Menge nun verstehen? Was sind die Probleme? Wurden sie gelöst und wenn ja, wie? Jene Fragen werden im Folgenden beantwortet und sollen zum weiteren Nachdenken über das wohl abstrakteste Thema der Mathematik anregen.

1.2 Der Begriff der Menge

Definition 1.1: Die Sprache der Mengenlehre

$$X \in Y$$

Man liest "X ist ein Element von Y"

Diese Ausarbeitung beschäftigt sich mit der Präzisierung des Mengenbegriffs und dessen Axiome. Dieser wird im Allgemeinen mithilfe von zwei Theorien beschrieben. Die

[1] Gottlob Frege, Begründer des Logizismus, (1848-1925)
[2] Kurt Gödel, 1906-1978, Logiker, Namensgeber der berühmten Vollständigkeits und Unvollständigkeitssätze
[3] Georg Cantor (1845-1918) Halle. Zahlentheorie, Analysis, Begründer der Naiven Mengenlehre

erste ist die **Theorie über den Mengenbegriff**. Sie kennt nur den Begriff der Menge. Diese Theorien sind mithilfe der Prädikatenlogik erster Stufe formuliert. Beispiele dafür sind die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre (siehe Kapitel 4) oder auch die Kripke-Platek-Mengenlehre [4].

Die zweite ist eine **Theorie über Mengen und Klassen**. Dort wird zwischen den beiden Objekten unterschieden. Eine Klasse ist bildlich gesprochen eine Anhäufung von Objekten, die so mächtig ist, dass man sie nicht mehr als ein abgeschlossenes Ganzes betrachten kann. Das mathematische Universum ist in einer solchen Theorie aufgeteilt in eine Mengen-und Klassenwelt. Objekte, die Widersprüche hervorrufen könnten (zum Beispiel die Russelsche Klasse, siehe Kapitel 3) werden hier nicht ausgeschlossen, sondern in eine sogenannte "Klassenwelt" verschoben. Dennoch hat eine Klasse bestimmte Restriktionen, zum Beispiel dürfen sie nicht Elemente einer anderen Klasse oder Menge sein.
Diese Theorie ist ebenfalls vertreten in der Historie durch zum Beispiel die Typentheorie von Betrand Russel[4], oder auch die Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre (NBG) [5]. Sie ist das Äquivalent zur ZFC-Mengenlehre, denn in NBG sind Mengen eine bestimmte Art von Klassen.

2 Naive Mengenlehre

Die Naive Mengenlehre beschreibt die Mengenlehre basierend auf Georg Cantor, welche sich auf das in der Motivation gegebene Zitat zurückführen lässt. Es bringt uns zwei Axiome: das Axiom der Extensionalität und das der Vollen Komprehension.

2.1 Das Axiom der Extensionalität

In Worten bedeutet dieses Axiom, zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die selben Elemente besitzen.

Axiom 2.1:

$$\forall x, y(\forall z \in x \leftrightarrow x \in y) \to (x = y)$$

Bemerkung: In Anlehnung an den Primärtext und der prädikatenlogischen Konvention, Variabeln klein zu schreiben, werden Mengen in diesem Kapitel stets mit Kleinbuchstaben bezeichnet.

[4]Bertrand Russel (1872-1970) Großbritannien, USA. Mathematische Logik, Philosophie. Nobelpreis für Literatur 1950.

2.2 Das Axiom der Vollen Komprehension

Das Axiom der vollen Komprehension besagt, eine Menge beziehungsweise Klasse ist definiert über die Eigenschaften ihrer Elemente.

Axiom 2.2:

$$\forall \varphi(x, y_1, \ldots, y_n) : \forall y_1, \ldots, y_n \exists x \forall z (z \in y \leftrightarrow \varphi(z, y_1, \ldots, y_n))$$

Das heißt für jede Formel φ(z,$y_1, \ldots, y_n$), mit $y_1, \ldots, y_n$ fest, ist die Klasse $\{z\ |\varphi$(z,$y_1, \ldots, y_n\}$ eine Menge. Jene Definition scheint zunächst harmlos, doch es ist zu beachten, dass es hier keine Einschränkungen für die Wahl an das Objekt x gibt, was uns zu folgendem Widerspruch führt:

3 Die Russelsche Antinomie

3.1 Eine Anschauliche Beschreibung

Die Russelsche Antinomie lässt sich auf viele Arten beschreiben. Sie ist einer der vielen logischen Widersprüche, die dazu geführt haben Cantors Mengenlehre, aber auch auch die Logik neu zu denken[5]. Eine anschauliche Erläuterung [3] des nach Betrand Russel benannten Widerspruchs wird im Folgenden gegeben:

Im Allgemeinen enthält eine Menge sich nicht selbst. Die Menge der ganzen Zahlen ist beispielsweise selbst keine ganze Zahl, eher dessen Ansammlung. Eine solche Menge nennen wir "gewöhnlich". Jedoch ist es in der naiven Mengenlehre für eine Menge möglich, sich selbst als Element zu enthalten, zum Beispiel die Menge S: 'S enthält als Element alle Mengen, die als Satz der deutschen Sprache formulierbar sind.' Diese Art von Mengen definieren wir als "ungewöhnliche" oder "annormale" Mengen. Nun sind die meisten Mengen in der Mathematik gewöhnlich und man könnte sich demnach nur auf die "Menge der gewöhnlichen Mengen"konzentrieren. Nennen wir diese mal C. Ist C nun eine gewöhnliche oder ungewöhnliche Menge?

Fall 1: Wir nehmen an, C sei eine gewöhnliche Menge. Dann muss C sich jedoch selbst enthalten, denn C beinhalten alle gewöhnlichen Mengen. $\rightarrow\perp$

Fall 2: C ist also eine anormale Menge, enthält sich demnach selbst, dies führt jedoch erneut zum Widerspruch nach der Definition von C.

Daraus können wir schließen, dass es keine logische Vorstellung der Menge aller gewöhnlichen Mengen gibt.

[5]Die Auswirkungen der Russelschen Antinomie gingen weit über die Mathematik hinaus. Auch die Logik strukturierte sich neu und neue Trends kamen in Umlauf, wie zum Beispiel der *Dialetheismus.* Für weitere Literatur siehe [6]

3.2 Die Formalisierung

Definition 3.1: Mit

$$R := \{z \mid z \notin z\}$$

bezeichnen wir die Russelsche Klasse.

Satz 3.1: Die naive Mengenlehre ist inkonsistent.

Beweis. Sei φ(x):= $\neg x \in x$.

Wendet man das Axiom der vollen Komprehension auf die Formel φ an, erhält man:

$\exists x \forall z(z \in x \leftrightarrow \neg z \in z)$ (1)

somit also die Russelsche Klasse. Da (1) für alle z gilt, gilt es insbesondere für x und dies führt zum Widerspruch:
x $\in x \leftrightarrow x \notin x$ □

3.3 Die Russelsche Typentheorie

Russel konzipierte unterdessen eine Lösung seiner berühmten Antinomie. Zusammen mit Alfred Whitehead[6] publizierte er im ersten Jahrzehnt des 20. Jahrhunderts die "Principia Mathematica". Dort hierarchisierte er Mengen in bestimmte Typen. In einem Typ existieren nur Mengen höherer Stufe, somit ist ein Selbstbezug nicht möglich, also insbesondere Aussagen wie "die Menge aller Mengen". Heutzutage gilt die Russelsche Typentheorie als überholt, da sie zu kompliziert in der Anwendung war und meist wird die Vereinfachung von Willam Quine in seinem Werk "New Foundations"[7] verwendet.

4 Eine neue Mengenlehre

4.1 Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre

Die Mathematiker Ernst Zermelo und Abraham Fraenkel arbeiteten an der nach ihnen benannten ZF-Mengenlehre, welche aktuell die Basis der Mathematik bildet. Durch ihre Axiome versuchten sie präzise die Mathematik zu axiomatisieren, um Antinomien zu vermeiden. Zermelo veröffentlichte 1907 die erste Fassung seines Werkes und wurde daraufhin sowohl von Abraham Fraenkel, als auch von Thoralf Skolem auf Ergänzungen hingewiesen, weswegen man auch von der Zermelo-Fraenkel-Skolem Mengenlehre sprechen kann. Sie besteht aus neun Axiomen, zu denen man optional auch das 'Auswahlaxiom'

[6] Alfred Whitehead (1861-1947) Harvard. Naturphilosoph, Wissenschaftstheoretiker und Mathematiker.
[7] William Quine (1908-2000) Harvard. Philosophie. Mengenlehre.

hinzunehmen kann, in diesem Fall spricht man dann von der ZFC (*Zermelo-Fraenkel-Choice Mengenlehre*).

Die ZFC Mengenlehre wird formuliert mithilfe der Prädikatenlogik erster Stufe und der Sprache der Mengenlehre (Definition 1.1). Die Variablen werden mit Großbuchstaben gekennzeichnet und stehen für Mengen, das bedeutet sie sind die einzigen Objekte, die von ZFC betrachtet werden.

4.2 Die ersten vier Axiome

4.2.1 Das Axiom der Extensionalität

Die insgesamt zehn Axiome der ZFC sind eine Anleitung, wie man aus Mengen neue Mengen konstruieren kann.[8]

Axiom 4.1: $\forall X \forall Y (X = Y \leftrightarrow \forall Z (Z \in X \leftrightarrow Z \in Y))$
Zwei Mengen sind genau dann identisch, wenn sie die selben Elemente haben.

Definition 4.1: Für die Formel: $\forall Z (Z \in X \rightarrow Z \in Y)$ schreibt man "X ⊆ Y". Man spricht "X ist eine Teilmenge von Y"

Abkürzend kann man schreiben, zwei Mengen M und N sind genau dann gleich wenn: M ⊆ N und M ⊇ N.

4.2.2 Das Axiom der Aussonderung

Axiom 4.2: Zu jeder Menge X und jeder *Eigenschaft* φ gibt es eine Menge, die genau die Elemente von X enthält, die die besagte Eigenschaft haben. Dieses Axiom soll das Axiom der vollen Komprehension der naiven Mengenlehre ersetzen. Der entscheidende Unterschied ist, dass wir Einschränkungen an die Eigenschaft φ stellen. Formal sieht dieses Axiom wie folgt aus:

$\forall Y_0, \ldots, Y_n \exists X \forall Z (Z \in X \leftrightarrow (Z \in Y_0 \wedge \varphi(Z, Y_1, \ldots Y_n))$

Die Einschränkung ist, dass Z Element von Y_0 sein muss, wobei Y_0 eine Menge ist, so vermeidet man die Russelsche Antinomie.
Hieran erkennt man, dass ZF **nicht endlich axiomatisierbar** ist, da es für jede Formel φ ein Axiom der Aussonderung gibt, demnach gibt es unendlich viele Axiome, da es unendlich viele Eigenschaften gibt, mithilfe derer wir eine Mengen charaktersieren können. Man schreibt: $\{Z \in X \mid \varphi\}$, wobei φ eine Eigenschaft ist.

[8] ZF ist nicht endlich axiomatisierbar, das heißt im Grunde gibt es unendlich viele Axiome, siehe Axiom 4.2

Mithilfe dieses Axioms können wir nun folgende Begriffe definieren: Seien X, Y Mengen.

Definition 4.2: Dann ist der **Durchschnitt**: $X \cap Y := \{Z \in X \mid Z \in Y\}$

Definition 4.3: Die **Differenz** zweier Mengen: $X \setminus Y := \{Z \in X \mid \neg Z \in Y\}$

Definition 4.4: Die **Leere Menge** ist wie folgt definiert: $\emptyset := \{Z \mid \neg Z = Z\}$[9]

4.2.3 Das Axiom der Paarung

Axiom 4.3: $\forall X \, \forall Y \, \exists Z \, \forall U (U \in Z \leftrightarrow U = X \vee U = Y)$

Dies bedeutet, dass es für zwei vorgegebene Mengen genau eine Menge gibt, die diese beiden Mengen enthält.

Diese Menge wird auch *Paarmenge* oder *ungeordnetes Paar* genannt und sie motiviert folgende Definition

Definition 4.5: Die geordnete Menge von zwei Mengen X und Y ist die Menge $(X, Y) = \{\{X\}, \{X, Y\}\}$, sie heißt auch *Kuratowski-Paar*.

Lemma 4.1: In ZFC ist beweisbar: $\forall \, X_1, \; X_2, \; Y_1, \; Y_2$
$(X_1, X_2) = (Y_1, Y_2) \implies X_1 = Y_1 \wedge X_2 = Y_2$

Beweis. [10] $(X_1, X_2) \overset{Def.}{=} \{\{X_1\}, \{X_1, X_2\}\} = \{\{Y_1\}, \{Y_1, Y_2\}\} \overset{Def.}{=} (Y_1, Y_2)$
$\{X_1\} \in \{\{X_1\}, \{X_1, X_2\}\} \implies \{X_1\} \in \{\{Y_1\}, \{Y_1, Y_2\}\}$
$\implies \{X_1\} = \{Y_1\} \vee \{X_1\} = \{Y_1, Y_2\}$
Fall 1: $\{X_1\} = \{Y_1\}. \implies X_1{=}Y_1$
Aus $\{X_1, X_2\} = \{Y_1, Y_2\}$ und $X_1{=}Y_1$ folgt $X_2{=}Y_2$
Fall 2: $\{X_1\} = \{Y_1, Y_2\}$ mit Axiom 4.1 folgt $X_1 = Y_1 = Y_2$
Aus $\{X_1, X_2\} = \{Y_1, Y_2\}$ und $X_1{=}Y_1{=}Y_2$ folgt $X_1{=}X_2{=}Y_1{=}Y_2$

□

[9] Die leere Menge ist die einzige Menge, dessen Existenz wir a priori annehmen.
[10] Dies ist ein simpler, mathematischer Beweis, wie wir ihn herkömmlich sehen würden. Er lässt sich ebenfalls in der Sprache von ZF formulieren, hier verweise ich auf [1].

4.2.4 Das Axiom der Vereinigung

Axiom 4.4: $\forall X \exists Y \forall Z (Z \in Y \leftrightarrow \exists U (Z \in U \wedge U \in X))$

Zu einer vorgegeben Menge X gibt es eine Menge Y , deren Elemente genau die Elemente von Elementen von X sind. Die Menge U nennt man auch die *Vereinigung.*
Notation: $\bigcup$ X = Y oder $\bigcup_{U \in X} U$ = Y

5 Fazit

Was ist nun eine Menge? Diese Frage kann nicht beantwortet werden. Ein axiomatisches System kann uns nur zeigen, wie wir mit Mengen operieren dürfen. Die Probleme der naiven Mengenlehre wurden durch Definitionen vermieden, sei es durch eine Typentheorie oder zum Beispiel durch die ZFC-Mengenlehre. Warum hat sie sich durchgesetzt? Im Allgemeinen kann man sagen, die ZFC Mengenlehre war am nächsten dran an dem, wie Mathematiker in den letzten Jahrhunderten gearbeitet haben. Genau definieren, was eine Menge ist, können wir nicht. Woher wissen wir dann, dass es Mengen überhaupt gibt? Dies müssen wir a priori annehmen. Denn die einzige Menge, über die ZFC eine Existenzaussage macht, ist die leere Menge. Wir müssen ihre Existenz annehmen, wenn wir Mathematik in einem solchem System betreiben wollen. Aber dies könnte sogar ausreichen, denn wie uns bereits bekannt ist,wurden die natürlichen Zahlen nur mithilfe der leeren Menge und die Eigenschaft einer Potenzmenge konstruiert[11] und aus den natürlichen Zahlen lassen sich weitere Zahlensysteme konstruieren. Für die tagtägliche Mathematik müssen wir uns nicht im Detail mit Mengen beziehungsweise ihrer Konstruktion beschäftigen, jedoch sollte man sich fragen, wie sicher das Fundament auf dem die Mathematik gebaut wurde, eigentlich ist, und welche Konsequenzen das tragen könnte.

[11] Die Potenzmenge wird im zweiten Teil des Vortrags eingeführt, ebenso wie die weiteren Axiome von ZFC

6 Literaturverzeichnis

- *Primärliteratur*

  1 Ziegler, Martin: Mathematische Logik, Freiburg 2017 (2.Auflage). S.56-60.

- *Sekundärliteratur*

  2 Cantor, Georg. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Math. Ann.* 46:481-512, 1895

  3 Courant, Richard.: Was ist Mathematik? New York 1992 S. 69

  4 Gostanian, R.: Constructible Models of Substets of ZF. In: *Journal of Symbolic Logic* 45 (1980), Nr. 2, S. 237-250

  5 Hoffmann, Dirk W.: Grenzen der Mathematik. Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik, Karlsruhe 2018 (3.Auflage). S.149-173.

  6 Priest, Graham: In Contradiction, New York 2006 (2. Auflage). S. 28-38

7 Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese vorliegende Ausarbeitung und den dazugehörigen Vortrag ohne Hilfe von Dritten und nur mit den von mir angegebenen Hilfsmitteln selbstständig verfasst habe. Alle von mir verwendeten Quellen wurden im Literaturverzeichnis genannt.

Lisa Michajlova, 04. Januar 2019

RUHR
UNIVERSITÄT
BOCHUM

RUB

Proseminar

8 . Die Axiome

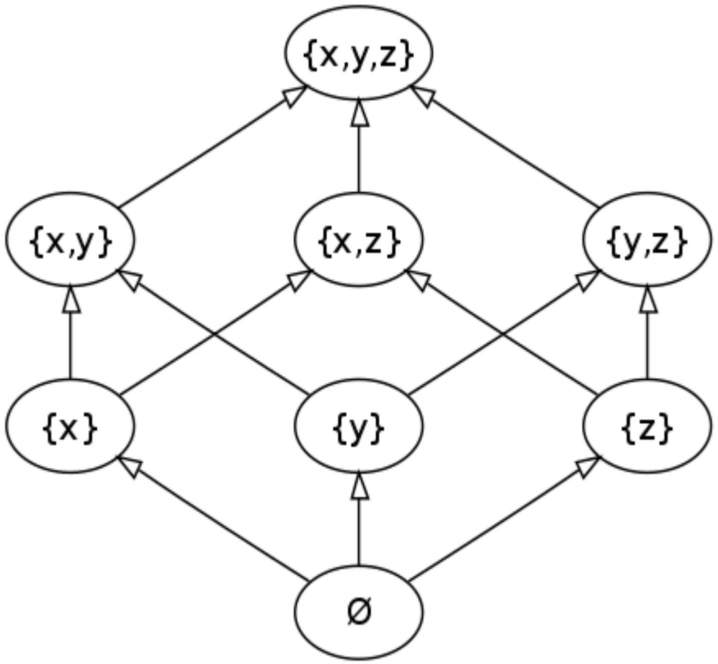
108016263063
Hong,Seil

Index

- Axiom(Potenzmenge)
- Axiom(Ersetzung)
- Axiom(Fundierung)
- Axiom(Unendlichkeit)
- Axiom(Auswahl)

Axiom(Potenzmenge)

- Die Potenzmenge $\mathfrak{B}(y)$ ist die Menge aller Teilmenge von y.
- $\forall y \exists x \forall z \; z \in x \leftrightarrow z \subset y$
- $\mathfrak{B}(y) = \{z | z \subset y\}$



Hasse-Diagramm(aus Wiki)

Beispiel

- Eine Menge A = {a,b}
- Teilmengen von A sind $\emptyset$,{ a } , { b } , { a , b }.
- Potenzmenge von A ist Menge aller Teilmenge von A.

d.h $\mathfrak{B}(A) = \{ \emptyset , \{ a \} , \{ b \}, \{ a , b \} \}$

Lemma

- Aus den Axiomen von ZFC folgt für alle a und b die Existenz des direkten Produktes

$$\mathrm{a} \times \mathrm{b} = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \mid \mathrm{x} \in \mathrm{a} \wedge \mathrm{y} \in \mathrm{b}\}$$

Beipsiel

- A = {1,2} B ={3,4}

- $$a \times b = \{ (1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

Beweis

- wenn $x \in a$ und $y \in b$, sind $\{x\}$ und $\{x,y\}$ Elemente von $\mathfrak{P}(a \cup b)$.
Dann ist $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$ ein Element von $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(a \cup b))$.
Es folgt, dass $\{(x,y) \mid x \in a \wedge y \in b\}$ eine definierbare Teilklasse von $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(a \cup b))$ ist.
Also eine Menge nach dem Aussonderungsaxiom. $\square$

Was ist Tripel?

Wir definieren Tripel durch

$$(x,y,z) = ((x,y),z)$$

und $a \times b \times c = \{(x,y,z) \mid x \in a,\ y \in b,\ z \in c\}$.
Entsprechend Viertupel usw. Eine Relation ist nun eine Menge von Paaren.

Definitionsbereich und Bildbereich

Eine Relation ist nun eine Menge von Paaren. Der Definitionsbereich von R ist

$$\mathrm{dom}(R) = \{x \mid \exists y\ (x,y) \in R\},$$

der Bildbereich

$$\mathrm{Im}(R) = \{y \mid \exists x\ (x,y) \in R\}$$

Definitions- und Bildbereich sind Mengen, Weil sie Teilklassen von $\bigcup\bigcup R$ sind:

$$\{\{x\},\{x,y\}\} \in R \Rightarrow \{x,y\} \in \bigcup R \Rightarrow x,y \in \bigcup\bigcup R.$$

Funktion

Eine Funktion f ist eine rechtseindeutige Relation :

$$\forall x,y_1,y_2\ (x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \rightarrow y_1 = y_2$$

Wir identifizieren also eine Funktion mit ihrem Graphen. Man schreibt dann

$$f(x) = y$$

für $(x,y) \in f$. Wenn $x \notin \mathrm{dom}(f)$, setzen wir $f(x) = \emptyset$. Die schreibweise

$$f : a \rightarrow b$$

bedeutet $\mathrm{dom}(f) = a$ und $\mathrm{Im}(f) \subset b$. wir b nicht spezifieren wollen, schreiben wir $f : a \rightarrow V$.

$$f \uparrow c = f \cap (c \times b)$$

ist die Einschränkung von f und c.

$$f[c] = \{f(x) \mid x \in c\}$$

ist der Bildbereich von $f \uparrow c$.

Axiom(Ersetzung)

$$\forall y,\bar{w}(\forall u\exists!z\rho(u,z,\bar{w})\rightarrow\exists x\forall z(z\in x\leftrightarrow\exists u(u\in y\wedge\rho(u,z,\bar{w}))))$$

Surjektiv ,injektiv und bijektiv

Eine Funktion $f : a \to b$ heißt
surjektiv, wenn $\mathrm{Im}(f) = b$,
injektiv, wenn f^{-1} eine Funktion ist,
bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Satz 8.1

In T sei beweisbar, dass φ eine Funktion definiert, also

$$\mathrm{T}\vdash\forall \mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_\mathrm{n}\exists!\mathrm{x}_0\varphi(\mathrm{x}_0,\ldots,\mathrm{x}_\mathrm{n})$$

Sei f ein neues n-stelliges Funktionszeichen und L' = L $\cup$ {f}. Dann ist die L' Theorie

$$\mathrm{T'}=\mathrm{T}\cup\{\forall \mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_\mathrm{n}\varphi(\mathrm{f}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_\mathrm{n}),\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_\mathrm{n})\}$$

eine konservative Erweiterung von T. Darüberhinaus gibt es zu jeder L'-Formel ψ eine L-Formel ψ^* mit T'$\vdash\psi\leftrightarrow\psi^*$

Definition

Eine Erweiterung einer Theorie durch definierte Relationszeichen, Funktionszeichen und Konstanten heißt definitorische Erweiterung.
Man kann leicht zeigen, dass konservative Erweiterungen T', für die jede L'-Formel zu einer L-Formel T'-beweisbar äquivalent ist, definitorisch sind

Beispiele

Relationszeichen : $x \subset y$ $f : a \rightarrow b$

Funktionszeichen : $\{ z \in x \mid \varphi(z, y_1, \ldots, y_n)\}$ $x \cup y$ $x \cap y$ $x \setminus y$ $\bigcup y$ $\mathfrak{B}(y)$ $\{x, y\}$ $\{y_1, \ldots, y_n\}$ (x, y) $x \times y$ $\mathrm{dom}(R)$ $\mathrm{Im}(R)$ R^{-1} $f(x)$ $f[x]$ $f{\uparrow}y$

Konstantenzeichen $\emptyset$

Folgerung

- Aussonderungsaxiom und Ersetzungsaxiom bleiben gültig, wenn φ neu eingeführte Relationszeichen, Funktionszeichen und Konstanten enthält.

Definition(Informell)

Eine Menge x heißt fundiert, wenn jede bei x anfangende absteigende $\in$-Kette

$$x \ni y_0 \ni y_1 \ni \dots$$

nach endlich vielen Schritten abbricht.
Das Fundierungsaxiom drückt aus, dass jede Menge fundiert ist

Axiom(Fundierung)

$$\forall x(\neg x \doteq \emptyset \to \exists z \in x \; z \cap x \; \doteq \emptyset)$$

Folgerung

- Eine Menge kann sich nicht selbst als Element enthalten.

Axiom(Unedlichkeit)

$\exists \mathrm{x}(\emptyset \in \mathrm{x} \wedge \forall \mathrm{z} \in \mathrm{x}\ \mathrm{z} \cup \{\mathrm{z}\} \in \mathrm{x})$

$\mathrm{Bsp}:\ \mathrm{x} = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ldots\}$

Axiom(Auswahl)

$$\forall x(\neg\emptyset\in x\to \exists f : x\to V\ \forall z \in x\ f(z)\in z)$$

Die Natürlichen Zahlen

Tristan Schiller

3. Januar 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Intuition über $\mathbb{N}$ bezüglich Ordnung und Struktur

In diesem Kapitel nähern wir uns den natürlichen Zahlen über zwei Definitionen. Von der Sinnhaftigkeit dieser überzeugen wir uns später. Diese Definitionen liefern uns eine Intuition für die natürlichen Zahlen und deren Struktur. Außerdem werden wir ein Gefühl für $\in$ als Relation über $\mathbb{N}$ erhalten.

1.1 Eine Rekursive Definition

Definition 1.1:
Wir definieren durch

$$\underline{n} = \{\underline{0}, \underline{1}, ..., \underline{n-1}\}$$

für jede natürliche Zahl n eine Menge $\underline{n}$.
Per Definition gilt

$$\underline{0} = \emptyset$$

$$\underline{1} = \{\emptyset\}$$

1.2 Nachfolger

Definition 1.2:
Sei der Operator **s** mit $s(x) := x \cup \{x\}$ der **Nachfolger von x**.

Feststellung 1.1:
Es gilt:

$$\forall n: \ \ \mathbf{ZFC} \vdash \underline{n+1} = s(\underline{n})$$

zu beweisen.
Beweis:
Wir zeigen zuerst, dass diese Gleichung auch für $n = 0$ gilt. Danach zeigen wir diese Gleichung für $n > 0$.
n=0: $\Rightarrow \underline{0+1} = \{\emptyset\} = \{\underline{0}\} \cup {}^{1}\emptyset = \{\underline{0}\} \cup \underline{0} = s(\underline{0})$
n>0: $\Rightarrow \underline{n+1} = \{\underline{0}, ..., \underline{n}\} = \{\underline{0}, ..., \underline{n-1}\} \cup \{\underline{n}\} = \underline{n} \cup \{\underline{n}\} = s(n)$

$\square$

Lemma 1.1:
Wenn $m < n$ erfüllt ist, gilt:

$$\mathbf{ZFC} \vdash \neg \underline{m} \doteq \underline{n}$$

[1] Vereinigungs- und Paarmengenaxiom

Beweis:
Wir führen diesen Beweis per Induktion über n aus.
IA: Wähle $n_0 = \underline{m+1} \Rightarrow \underline{m+1} \setminus \underline{m} = \{\{\underline{m}\} \cup \underline{m}\} \setminus \underline{m} = \{\underline{m}\} \neq \emptyset$. An dieser Stelle ist anzumerken, dass der Spezialfall $m = \emptyset$ erfüllt ist und diese Argumentation für alle anderen m funktioniert.
IV: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : \neg \underline{m} \doteq \underline{n}$
IS: *Zeige* $\underline{n_0+1} \neq \underline{m}$: Es ist zu beweisen, dass $n_0 + 1 > n_0$ gilt. Dies ist aber nach Subtraktion von n_0 offensichtlich und die Behauptung folgt.

□

Feststellung 1.2:
$\forall m, n$ gilt:

$$1.2.1 \;\; m < n \Rightarrow \;\; \mathbf{ZFC} \vdash \underline{m} \in \underline{n}$$

$$1.2.2 \;\; m \geq n \Rightarrow \;\; \mathbf{ZFC} \vdash \underline{m} \notin \underline{n}$$

Beweis:
2.1: Es sei m<n. Schreibe $\underline{n} = \{\underline{0}, ..., \underline{m-1}, ..., \underline{n-1}\}$. Bilde $\underline{m} \cap \underline{n} = \underline{m} = \{\underline{0}, ..., \underline{m-1}\}$.
2.2: Nehmen wir $\underline{m} \in \underline{n}$ an. Es sei zuerst m=n: $\underline{m} \cap \underline{n} = \underline{n} = \{\underline{0}, ..., \underline{n-1}\}$. $\underline{\text{m}}$ liegt nicht in dieser Menge. $\lightning$. Es gelte nun m>n: $\underline{m} = \{\underline{0}, ..., \underline{n-1}, ...\underline{m-1}\}$. Betrachte $\underline{m} \cap \underline{n} = \underline{n} = \{\underline{0}, ..., \underline{n-1}\}$. Wie wir sehen ist $\underline{\text{m}}$ nicht im Durchschnitt enthalten.

□

2 Die natürliche Zahl

2.1 (Linear-) partielle Ordnungen

Sei $<$ eine Relation auf a (also eine Teilmenge von $a \times a$)
1. $<$ ist eine partielle Ordnung, wenn
   a) $<$ irreflexiv ist: $\neg\, x < x \;\forall\; x \in a$.
   b) $<$ transitiv ist: $x < y \wedge y < z \rightarrow x < z \;\forall x, y, z \in a$.
2. Eine partielle Ordnung $<$ auf a heißt linear, wenn $\forall x, y \in a$

$$x < y \vee x \doteq y \vee y < x$$

2.2 Transitivität einer Menge

Eine Menge x heißt transitiv, wenn alle ihre Elemente auch Teilmengen sind:

$$z \in y \in x \;\rightarrow\; z \in x$$

x ist genau dann transitiv, wenn $\bigcup x \subset x$.

2.3 Definition der natürlichen Zahl

x heißt natürliche Zahl, wenn

1. x transitiv ist,
2. $\in$ eine lineare Ordnung auf x definiert
3. und jede nicht-leere Teilmenge von x bezüglich dieser Ordnung ein kleinstes und größtes Element besitzt.

3 Logische Folgerungen und ω

In diesem Kapitel verknüpfen wir das Wissen des ersten und zweiten Kapitels und vergewissern uns der Sinnhaftigkeit unserer Definitionen. Außerdem sehen wir genau wie die natürlichen Zahlen aufgebaut sind und an welchen Stellen sie beschränkt sind.

3.1 n und $\underline{n}$

Lemma 3.1:
In **ZFC** ist beweisbar:

1. Elemente einer natürlichen Zahl sind natürliche Zahlen
2. $\underline{0}$ ist eine natürliche Zahl. Wenn x eine natürliche Zahl ist, so ist auch $s(x)$ eine natürliche Zahl.
3. Jede natürliche Zahl $\neq \underline{0}$ hat die Form $s(y)$ für eine natürliche Zahl y.

Beweis:

3.1.1: Es sei x eine natürliche Zahl und y ein Element von x. Die Relation $\in$ ordnet y ebenfalls linear, und jede nicht-leere Teilmenge von y hat bezüglich $\in$ ein kleinstes und ein größtes Element . Zu zeigen bleibt, dass y transitiv ist. Das folgt aber sofort aus der Transitivität von $\in$ auf x.
3.1.2.1: In allen Definitionen, welche eine natürliche Zahl ausmachen, ist eine Aussage über alle Elemente der Menge zu treffen. Per Definition ist jedoch $\underline{0}$ die leere Menge und besitzt somit auch keine Elemente. Die Aussagen über alle Elemente der leeren Menge sind somit erfüllt und $\underline{0}$ ist eine natürliche Zahl.
3.1.2.2: Sei a eine natürliche Zahl. Nach Definition 1.2 gilt $s(a) = a \cup \{a\}$ Wir merken an dieser Stelle an, dass für ein Element aus $s(a)$ gilt: $\forall x \in s(a) : x \in a \vee x \in \{a\}$. In diesem Beweis werden wir jeweils immer eine Fallunterscheidung am Beispiel der Anmerkung vornehmen.
Zeige $s(a)$ ist transitiv:

- Sei $y \in a$. Dann folgt die Behauptung, weil a per Definition 2.3.1 bereits transitiv ist und y auch eine natürliche Zahl nach Lemma 3.1.1 ist.
- Sei $y \in \{a\}$. $\Rightarrow y = a$. Für jedes $z \in a$ gilt aber wieder die obere Tatsache, dass Elemente aus a wieder in $s(a)$ per Definition liegen.

Zeige Def. 2.3.2 auf $s(a)$:

- Dies ist eine Folgerung aus dem Fundierungsaxiom und wurde im Kapitel 8 auf Seite 65 bewiesen.

- Seien $x, y, z \in s(a)$. Für $z \in a$ wird wie in dem Beweis zur Transitivität der Menge die Eigenschaft, dass a eine natürliche Zahl ist, vererbt. Für $z \in \{a\}$ gilt die Eigenschaft, weil dann $z = a$ gilt und wie gerade die Eigenschaft vererbt wird.

- Seien $x, y \in s(a)$. Wir betrachten y als fest und x als variabel bezüglich der Teilmenge.
  - Sei $y \in \{a\}$: Es ist nur $x \in \{a\}$ zu zeigen. Die restlichen Fälle folgen, da a eine natürliche Zahl ist. Ist $x \in \{a\} \Rightarrow x = a$ und die Linearität ist erfüllt.
  - Weil in der Definition von Linearität ein $\vee$ verwendet wurde, folgen die restlichen Fälle indem wir für $y \in a$ umgekehrt argumentieren.

Zeige Def 2.3.3. auf $s(x)$:

- Es gilt nur die Eigenschaft für $\{a\}$ zu zeigen, da a eine natürliche Zahl ist und die Eigenschaft schon gilt. Die Elemente sind logisch zu erkennen:$\{a\}$ besitzt a als größstes und $\emptyset$ als kleinstes Element. Hierdurch zeigt sich, dass das kleinste Element von $s(a)$ $\emptyset$ ist und das größte Element a ist.

3.1.3: Wenn die natürliche Zahl x nicht leer ist, hat x ein $\in$-größtes Element y. Es ist also

$$x = \{z \mid z \in y \vee z \doteq y\} = s(y).$$

□

3.1.1 Exkurs zur Klasse

Sei $A(x)$ eine beliebige logische korrekt gebildete Aussage mit der Variable x, so wird die Gesamtheit aller Objekte x, die $A(x)$ erfüllen, als eine Klasse bezeichnet :

$$\{x \mid A(x)\}$$

3.2 Die Klasse der natürlichen Zahlen ω

Lemma 3.2: ω ist eine Menge.
Beweis: Sei x eine Menge wie im Unendlichkeitsaxiom. Wir zeigen, dass ω eine Teilmenge von x ist. Die Behauptung folgt dann aus dem Aussonderungsaxiom. Nehmen wir an, es gäbe ein a aus $\omega \setminus x$. Sei b das kleinste Element von $s(a)$, das nicht zu x gehört. Dann sind alle Elemente von b Elemente von x. Weil $b \notin x$, ist b nicht leer. Also hat b die Form $s(c)$. Dann ist $c \in x$, woraus aber $b \in x$ folgt. Ein Widerspruch der Annahme.

□

Folgerung 3.1(Induktion): Eine Menge von natürlichen Zahlen, die $\underline{0}$ enthält und unter s abgeschlossen ist, besteht aus allen natürlichen Zahlen.
Beweis: Wie im Beweis von Lemma 3.2 angemerkt ist per Definition eine beliebige Menge wie im Unendlichkeitsaxiom unter s abgeschlossen. Wir wissen außerdem aus Lemma 3.1.2, dass jedes $z \in x$ eine natürliche Zahl ist. Diese Folgerung sehen wir nun als bewiesen an. Anzumerken ist, dass diese Folgerung mit dem Aufbau jener beliebigen Menge das Prinzip der Induktion verdeutlicht.

□

3.3 Unmittelbarer Vorgänger/Nachfolger

Lemma 3.3 Es gilt:

1. $<$ [2] ist eine lineare Ordnung auf ω. Jede nicht-leere Teilmenge von ω hat ein kleinstes Element. [3]

2. Für alle $n \in \omega$ ist $s(n)$ der unmittelbare Vorgänger von n, also die kleinste Zahl größer als n.

3. Alle $n > \underline{0}$ haben einen unmittelbaren Vorgänger.

Beweis:

Wir zeigen zuerst die Vergleichbarkeit von zwei natürlichen Zahlen. Sei also $m \in \omega$ festgehalten. Wir zeigen durch Induktion, dass alle $n \in \omega$ mit m vergleichbar sind.

1. IA: Wenn $m \neq \emptyset$, hat m ein kleinstes Element m_0. Weil die Elemente von m_0 auch Elemente von m sind, muss $m_0 = \underline{0}$ sein. Es folgt, dass $\underline{0}$ mit m vergleichbar ist.

2. IV: Wir nehmen an, dass n mit m vergleichbar ist.

3. IS: Dies ist klar, wenn $m \leq n$ gilt. Wenn $n < m$, sei n_0 der unmittelbare Nachfolger von n in der linearen Ordnung von $s(m)$. Es ist also $n_0 \leq m$ und die Elemente von n_0 sind genau die Elemente von n und n selbst[4]. Das heißt aber $n_0 = s(n)$ und daher $s(n) \leq m$.

Beweis 3.3.1:

- Irreflexivität: Folgt direkt aus dem Fundierungsaxiom.

- Transitivität: Folgt, da alle Elemente aus ω natürliche Zahlen sind.

[2] Wir schreiben $<$ für die $\in$-Relation zwischen natürlichen Zahlen.
[3] Dies besagt, dass $<$ eine Wohlordnung aus ω ist
[4] Zum Verständnis betrachte Beweis 3.1.2.2

- Linearität: Sei $y \in \omega$ fest.
  1. y kann durch wiederholte Ausführung des s-Operators aus x gewonnen werden $\Rightarrow x \in y$
  2. x kann durch wiederholte Ausführung des s-Operators aus y gewonnen werden $\Rightarrow y \in x$
  3. $x = y$

  $<$ stellt also eine lineare Ordnung auf ω dar.

Beweis 3.3.1.2: Jede nicht-leere Teilmenge von ω besteht aus natürlichen Zahlen, welche durch $<$ linear geordnet sind. Sie besitzt somit eine natürliche Zahl, welche Element aller anderen Elemente der Teilmenge ist. Dies ist per Definition das kleinste Element.
Beweis 3.3.2: Sei $n \in \omega$ beliebig. Nehme an es existiere ein $p \in \omega$ mit $n \in p \in s(n)$. Dann gibt es zwei Fälle $p = n \vee p \in n$. In beiden Fällen ist n kein Element von p. Einmal durch die Irreflexivität und einmal per Linearität. $\lightning$ Ein solches p kann es nicht geben und $s(n)$ ist der unmittelbare Nachfolger von n.
Beweis 3.3.3: In Beweis 3.3.2 haben wir bereits gezeigt, dass ein solches p nicht existieren kann. Jedes n $\in \omega$ mit $\emptyset \in n$ lässt sich als unmittelbarer Nachfolger einer natürlichen Zahl schreiben. Es gilt für ein beliebiges n wie oben: $m \in n = s(m)$. Definiere m als den unmittelbaren Nachfolger.

$\square$

4 Verknüpfungen natürlicher Zahlen

In diesem Kapitel werden wir die Addition und Multiplikation auf ω definieren. Der Rekursionssatz auf ω wird uns dabei eindeutige Funktionen liefern mit denen wir die Addition und Multiplikation eindeutig rekursiv definieren können.

4.1 Rekursionssatz

Satz 4.1: Seien zwei Funktionen $g : A \to B$ und $h : A \times \omega \times B \to B$ gegeben. Dann existiert ein, eindeutig bestimmtes, $f : A \times \omega \to B$ mit

$$f(a, \underline{0}) = g(a)$$

$$f(a, s(n)) = h(a, n, f(a, n))$$

für alle $a \in A$ und $n \in \omega$.

Beweis 4.1:
Wir halten $a \in A$ fest. Wir führen eine Induktion über m aus und zeigen $\forall m \in \omega$ $\exists! f' : s(m) \to B$ mit $\varphi(a, m, f')$.
Es gilt $\varphi(a, m, f') = (f'(\underline{0}) \doteq g(a) \wedge \forall n < m \; f'(s(n)) \doteq h(a, n, f'(n)))$.

1. IA: Es sei $m = \emptyset$. Da es keine Elemente in ω gibt, welche $< \emptyset$ erfüllen, ist in der geforderten Bedingung lediglich $f'(\underline{0}) \doteq g(a)$ zu erfüllen. Es gibt aber nur eine Abbildung welche dies erfüllt. Definiere $f'(\underline{0}) \to B$, $x \mapsto$g(a).
2. IV: Wir nehmen an, $\exists m \in \omega : \exists! f' : s(m) \to B$ mit $\varphi(a, m, f')$ wie oben definiert.
3. IS: Wir versuchen nun für s(m) als Definitionsbereich die Bedingungen zu erfüllen. Wir definieren $f'(\emptyset)$ wie im IA und haben bereits die erste Bedingung erfüllt. Die Existenz für alle n<m ist dank der IV bereits eindeutig gegeben. Es ist so nur der Fall für m=n zu prüfen. Die Existenz von f'(s(m)) ist aber schon dank der IV gegeben. Dies gilt, da die Definition von $\varphi(a, m, f')$ in der zweiten Bedingung bereits für den unmittelbaren Nachfolger im Definitionsbereich den Wert angibt. Es gilt $f'(s(m) \doteq h(a, m, f'(m))$[5].

Wir definieren jetzt

$$f = \{(a, m, b) \in A \times \omega \times B \mid \exists f' \; \varphi(a, m, f') \wedge f'(m) \doteq b\}$$

$\square$

4.2 + und · auf $\omega \times \omega$

Definition 4.1: Wir definieren Addition $+ : \omega \times \omega \to \omega$ und Multiplikation $\cdot : \omega \times \omega \to \omega$ durch diese Rekursionsgleichungen:

$$\begin{aligned} a + \underline{0} &= a \\ a + s(n) &= s(a + n) \\ a \cdot \underline{0} &= \underline{0} \\ a \cdot s(n) &= s(a \cdot n) + a \end{aligned}$$

Rechenregeln wie

$$m + n = n + m$$

können nun per Induktion bewiesen werden.

[5]Eindeutige Existenz wird durch die IV geliefert

Proseminar: Mathematische Logik
Kapitel 10: Ordinalzahlen

Luca Schattschneider
Dozent Prof. Dr. Christoph Thäle

Vortrag: 11.01.2019

10 Ordinalzahlen

Um die Eigenschaften der natürlichen Zahlen zu verallgemeinern werden wir im Folgenden Ordinalzahlen betrachten.

Definition 1

Eine **Ordinalzahl** ist eine transitive Menge,
die durch die Relation $\in$ linear geordnet wird.

Eine **Klasse** ist ein System $\{x \mid \varphi(x, \bar{a})\}$ von Mengen, die eine Formel $\varphi(x, \bar{a})$ mit festgehaltenen Parametern $\bar{a} = a_1, ..., a_n$, erfüllt.

Die Klasse der Ordinalzahlen wird mit **On** bezeichnet.

Als Beispiel für Ordinalzahlen kennen wir bereits die natürlichen Zahlen mit folgender Konstruktion:

$0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Zudem ist die Klasse der natürlichen Zahlen ω eine Ordinalzahl.

Erinnerung:
Eine Menge M heißt ***linear geordnet*** *durch eine Relation R*
:⇔ $\forall x,\ y \in M$*:* $xRy \vee yRx$
Ein ***echtes Anfangsstück*** *S von einer Menge M ist definiert durch:*

$(y \in S) \wedge (x < y) \Rightarrow x \in S$

Lemma 1

1. On wird durch die Relation $\in$ linear geordnet. (Diese Ordnung wird auch $<$ genannt.)
2. Jede nicht-leere Teilklasse von On hat ein minimales Element.
3. Jede Ordinalzahl α ist die Menge ihrer Vorgänger:
$$\alpha \;=\; \{\beta \in On \mid \beta < \alpha\,\}$$

Beweis:

1. Sei S $\subsetneq \alpha$ ein echtes Anfangsstück von α und sei $\beta \;\in\; \alpha$ das kleinste Element von $\alpha \setminus$ S. Daraus folgt, dass $\beta =$ S ist.
Seien α und β zwei Ordinalzahlen und ist S $= \alpha \cap \beta$ ein Anfangsstück von α und β. Aus diesem Grund muss (S $= \alpha$) $\vee$ (S $= \beta$) sein. Denn wenn $\alpha \neq S \neq \beta$ wäre, so muss S $< (\alpha \cap \beta)$ sein, was ein Widerspruch zur obigen Annahme ist. Wenn S $= \alpha$, so ist $\alpha \leq \beta$ und wenn S $= \beta$, so ist $\beta \leq \alpha$.

2. Dass jede nicht-leere Teilklasse von On ein minimales Element hat, folgt aus dem Fundierungsaxiom.

3. Es bedeutet, dass Ordinalzahlen aus Ordinalzahlen bestehen. Sei α eine Ordinalzahl und β ein Element von α. Dann ordnet die Relation $\in$ β ebenfalls linear und jede nicht-leere Teilmenge von β hat bezüglich $\in$ ein kleinstes Element und ein größtes Element. Zu zeigen bleibt, dass β transitiv ist, dies folgt aber aus der Transitivität von $\in$ auf α. □

Aus 2. folgt ein Induktionsprinzip: Eine Teilklasse U von On enthält alle Ordinalzahlen, wenn für alle α gilt:

$$\alpha \subset U \Rightarrow \alpha \in U$$

Bemerkung 1

On ist keine Menge.

Beweis:
Nehmen wir an, dass On eine Menge ist, dann ist On eine Menge, bei der jedes Element eine transitive Menge ist. Aus der Definition folgt dann, dass On selbst eine Ordinalzahl sein müsste. Da On alle Ordinalzahlen enthält, müsste es auch sich selbst enthalten, was ein Widerspruch zu Lemma 1 (3) ist. □

Folgerung 1: Trichotomiesatz

Seien α und β zwei Ordinalzahlen, dann gilt:
$\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$ oder $\beta \in \alpha$

Definition 2

Eine Ordinalzahl der Form $s(\alpha)$ heißt **Nachfolgerzahl**. Man schreibt auch $\alpha + 1$ für den Nachfolger von α.
Eine Ordinalzahl $> \underline{0}$, die keine Nachfolgerzahl ist, heißt **Limeszahl**.

Beispiel
$Nachfolgerzahl:$
$\alpha = 5 = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow S(\alpha) = \alpha + 1 = 6 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$Limeszahl:$
ω (die Klasse der natürlichen Zahlen)

Definition 3

Ein **Funktional** $F : A \to V$ ist eine funktionale Klasse aus $A \times V$. Es ist also $\forall x \in A\ \exists! y : (x, y) \in F$.

Satz 1: Rekursionssatz

Zu jedem Funktional $G : V \to V$ kann man ein Funktional $F : On \to V$ angeben, sodass für alle $\alpha \in On$

$$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha).$$

Beweis:
Wir zeigen zuerst, dass es für alle β genau eine Funktion $f : \beta \to V$ gibt, die für alle $\alpha \in \beta$ die Rekursiongleichung erfüllt.
Zuerst die Eindeutigkeit: Wenn es ein anderes $f' : \beta \to V$ gibt, gibt es ein kleinstes $\alpha < \beta$ mit $f(\alpha) \neq f'(\alpha)$. Aus $f \restriction \alpha = f' \restriction \alpha$ folgt aber $f(\alpha) = f'(\alpha)$.
Wir zeigen die Existenz durch Induktion über β. Nehmen wir also an, dass die Behauptung schon für alle $\beta' < \beta$ gezeigt ist.
Es gibt drei Fälle:

1. $\beta = \underline{0}$. Wir setzen $f = \emptyset$
2. $\beta = \beta' + 1$. Wir wählen ein $f' : \beta' \to V$, dass die Rekursionsgleichung erfüllt und setzen $f = f' \cup \{(\beta', G(f'))\}$.
3. β ist eine Limeszahl. Nach dem Ersetzungsaxiom ist $X = \{f' : \beta' \to V \mid \beta' < \beta,\ f'$ erfüllt die Rekursionsgleichung$\}$ eine Menge, weil die Funktionen f' eindeutig durch β' bestimmt sind. Aus demselben Grund ist $f = \bigcup X$ eine Funktion.
   Schließlich setzen wir
   $F = \bigcup\{f : \beta \to V \mid \beta \in On,\ f$ erfüllt die Rekursionsgleichung$\}$. $\square$

Ähnlich definieren wir V die **von Neumann-Hierarchie**:

$$\begin{aligned} V_{\underline{0}} &= \emptyset \\ V_{\alpha+1} &= \mathfrak{P}(V_\alpha) \\ V_\lambda &= \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha,\ \lambda \text{ Limeszahl,} \end{aligned}$$

Man zeigt leicht, dass

$$V \;=\; \bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha$$

denn $V = V_{On}$ und On kann in die 0, Nachfolgerzahlen und Limeszahlen aufgeteilt werden. Man kann V also schreiben als
$V_{\underline{0}} \cup (\bigcup_\alpha V_{\alpha+1}) \cup V_\lambda \Rightarrow V = \bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha$
V_ω besteht aus den *erblich endlichen Mengen*, d.h.:

Definition 4

Eine Menge heißt **erblich endlich**, wenn sie in einer endlichen transitiven Menge enthalten ist. Zwei Ordnungen sind **ordnungsisomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung gibt, die ordnungstreu ist, das heißt:

$$x \;<\; y \;\Leftrightarrow\; f(x) \;<\; f(y)$$

Zwei Mengen sind demnach ordnungsisomorph, wenn ihre Elemente die gleiche Ordnungstruktur haben und gleichmächtig sind.

Lemma 2

Jede Wohlordnung (wohlgeordnete Menge) ist zu genau einer Ordinalzahl (ordnungs-)isomorph.

Beweis:
Sei $(a,<)$ eine Wohlordnung. Wir suchen eine Ordinalzahl α und eine Bijektion $f:\alpha \;\rightarrow\; a$, die ordnungstreu ist. Sei $*$ eine Menge, die nicht zu a gehört. Wir definieren

$$F: On \;\rightarrow\; a \cup \{*\}$$

durch

$$F(\beta) = \begin{cases} min(a \setminus F[\beta])\ wenn\ a \;\not\subset\; F[\beta] \\ *\ sonst \end{cases}$$

$*$ muss im Bild von F vorkommen, damit F keine ordnungstreue Abbildung ist. Denn wenn F ordnungstreu wäre, so folgt daraus, dass F injektiv wäre und somit $F^{-1}[a] \;=\; On$ eine Menge. Dies ist nach der Bemerkung 1 nicht der Fall. Sei α die kleinste Ordinalzahl, für die $F(\alpha) \;=\; *$ gilt. Dann ist $f \;=\; F \;\upharpoonright\; \alpha$ der gesuchte Isomorphismus zwischen Wohlordnung und Ordinalzahl.

α ist eindeutig bestimmt. Denn sei $f' : \alpha' \to a$ ein zweiter Isomorphismus, dann erfüllt $F' = f' \cup \{(\beta, *) \mid \alpha' \leq \beta\}$ die gleiche Rekursionsgleichung und es folgt $F' = F$ und $\alpha' = \alpha$. □

Beispiel
1. Sei $(\mathbb{N}_0, <)$ gegeben, dann ist diese Wohlordnung zu ω isomorph.
2. Sei $(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, <)$ gegeben, dann ist diese Wohlordnung zu $\alpha = 6$ isomorph.
Aus dem Beweis folgt, dass nicht nur α, sondern auch der Isomorphismus zwischen a und α eindeutig ist.

Definition 5

Eine Funktion $f : x \to V$ mit $f(z) \in z$ für alle $z \in x$ heißt **Auswahlfunktion**.

Für eine nicht-leere Menge mit Wohlordnung existiert die Auswahlfunktion $f(z) = min(z)\ \forall z \in x$. Dies gilt ohne, dass man das Auswahlaxiom annehmen muss. Umgekehrt folgt aus dem Auswahlaxiom der folgende Satz:

Satz 2: Wohlordnungssatz

Jede Menge hat eine Wohlordnung.

Beweis:
Sei a eine Menge und $* \notin a$. Man erhält eine Auswahlfunktion $g : \mathfrak{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to a$.
Definiere

$$F(\beta) = \begin{cases} g(a \setminus F[\beta])\ wenn\ a \not\subset F[\beta] \\ *\ sonst \end{cases}$$

wie im Beispiel von Lemma 2 sieht man, dass es ein α gibt, für das $f = F \restriction \alpha$ eine Bijektion zwischen α und a ist. Diese Bijektion transportiert die Wohlordnung von α auf a: Wir setzen

$x < y \Leftrightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$. □

Aus dem Auswahlaxiom folgt auch das $LemmavonZorn$, das wie der Wohlordnungssatz zum Auswahlaxiom äquivalent ist.

Definition 6

Eine **(echte) obere Schranke** von K ist ein Element s mit $a \leq s$ ($a < s$) für alle $a \in$ K.
Ein Element m heißt **maximales Element** von A, wenn A kein Element enthält, das größer als m ist.

Lemma 3: Zorn'sche Lemma

Sei $(a, <)$ eine partielle Ordnung, in der jede linear geordnete Teilmenge K eine obere Schranke s besitzt. Dann besitzt A ein maximales Element m.

Beweis:
Das Auswahlaxiom liefert uns ein Funktional G, das jeder Teilmenge von A, eine echte obere Schranke zuordnet und das sonst den Wert $*$ hat. Wir definieren

$$F : On \to A \cup \{*\}$$

durch

$$F(\beta) = G(F[\beta]).$$

Wenn F den Wert $*$ nicht annehmen würde, wäre F eine ordnungstreue Abbildung von On nach A, was nicht geht. Sei α minimal mit $F(\alpha) = *$. Dann ist $K = F[\alpha]$ eine linear geordnete Teilmenge von A, die keine echte obere Schranke hat. Sei m eine obere Schranke (und damit größtes Element) von K. Dann ist m maximal in A. □

Beispiel
Sei $A = \{0, 1, 2\}$ und $(A, <)$ eine partielle Ordnung, dann sind
$K_1 = \{0, 1\},\ K_2 = \{0, 2\},\ K_3 = \{1, 2\}$
die geordneten Teilmengen.
Die obere Schranke von K_1 ist 1.
Die obere Schranke von K_2 ist 2.
Die obere Schranke von K_3 ist 2.
Hieraus folgt, dass a ein maximales Element hat, dieses ist die 2.

Quellen:
Es wurden die Bücher:
(1) Mathematische Logik von Martin Ziegler
2. Auflage, Birkhäuser 2017
(2) Grenzen der Mathematik von Dirk Hoffmann
3. Auflage, Springer 2018

Ordinal- und Kardinalzahlen Teil 2

Luciana Herbeck

11. Januar 2019

Definition 1

1. Zwei Mengen a und b heißen *gleichmächtig* ($a \sim b$), wenn es eine Bijektion zwischen a und b gibt.
2. Mit der Schreibweise $a \preceq b$ drücken wir aus, dass es eine Injektion $f : a \to b$ gibt.
3. $a \preceq b$ bedeutet, dass a *gleichmächtig* zu einer Teilmenge von b ist.
4. Man überlegt leicht, dass $a \preceq b$ genau dann gilt, wenn a leer ist oder wenn es eine surjektive Abbildung von b nach a gibt.
5. Aus dem Wohlordnungssatz folgt, dass jede Menge gleichmächtig zu einer Ordinalzahl ist.

Definition 2 (Mächtigkeit)

Die *Mächtigkeit* $|a|$ einer Menge a ist die kleinste Ordinalzahl, die gleichmächtig zu a ist:

$$|a| = min\{\alpha \in On | \alpha \sim a\}.$$

Lemma 10.3

Seien a und b Mengen. Dann gilt

$$a \sim b \Leftrightarrow |a| = |b|, \tag{1}$$
$$a \preceq b \Leftrightarrow |a| \leq |b|. \tag{2}$$

Beweis (Lemma 10.3)

(1) Aus $\sim$ ist Äquvivalenzrelation folgt: $a \sim b \Leftrightarrow |a| = |b|$.

(2) " $\Leftarrow$ " z.z. $a \preceq b$.

Sei $|a| \leq |b|$ und seien α und β die zugehörigen Ordinalzahlen

$(|a| = \alpha, |b| = \beta)$.

Dann gilt $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \subset \beta$ ($\bigstar$).

Gesucht: Injektion von $f : a \to b$.

1. $\exists\ g : a \to |a| = \alpha$ bijektiv.
2. Durch ($\bigstar$) existiert Injektion $h : |a| = \alpha \to |b| = \beta$.
3. $\exists\ j : |b| = \beta \to b$ bijektiv.

$\Rightarrow f : a \to b = (j \circ h \circ g)$ injektiv.

Hilfssatz 10.4

Sei α eine Ordinalzahl und S eine Teilmenge von α. Dann ist der Ordnungstyp von S (mit der induzierten Wohlordnung) nicht größer als α.

Beweis

Siehe Buch (1) S.78.

Beweis (Lemma 10.3)

(2) " $\Rightarrow$ " z.z. $|a| \leq |b|$.

Sei $a \preceq b$, d.h. es existiert eine Injektion $f : a \to b$ ($\bigstar$).

1. $\exists\ g : |a| \to a$ bijektiv.
2. Durch ($\bigstar$) existiert Injektion $f : a \to b$.
3. $\exists\ j : b \to |b| = \beta$ bijektiv.

4. Sei $|a| := S \subseteq |b| \Rightarrow S \subseteq \beta\ (mitHilfssatz) \Rightarrow \gamma\ (Repräsentant\ von\ Ordnungstyp\ von\ S)$

$\leq \beta = |b| \Rightarrow |a| \leq |b|$.

Definition 3 (Kardinalzahl)

Eine Ordinalzahl α heißt *Kardinalzahl*, wenn gilt

$$\beta < \alpha \Rightarrow |\beta| < |\alpha|.$$

Definition 4 (Kardinalzahl)

Wir nennen α eine *Kardinalzahl*, wenn $\alpha = |\alpha|$.
Die Mächtigkeit einer Menge ist immer eine Kardinalzahl.

Lemma

Alle natürlichen Zahlen und ω sind Kardinalzahlen.

Beweis

Siehe Buch (1) S.78.

Definition 5 (endlich/abzählbar)

Eine Menge a heißt *endlich*, wenn $|a| < \omega$. Wenn $|a| = \omega$, heißt a *abzählbar*.

Satz (Cantor (1845-1918))

Sei a eine Menge und $\mathcal{P}(a)$ die zugehörige Potenzmenge.
Dann gilt:

$$|a| < |\mathcal{P}(a)|.$$

Beweis (Satz Cantor)

Zwei Mengen a und b heißen gleichmächtig ($|a|$=$|b|$), wenn es eine Bijektion zwischen a und b gibt.

Es gilt $|a| < |b|$, falls es keine surjektive Abbildung $f : a \to b$ gibt.

Annahme: Es existiert eine surjektive Abbildung $f : a \to \mathcal{P}(a)$.

Zeichnung:

Wieso liegt $b = \{x \in a \mid x \notin f(x)\}$ nicht im Bild von f?

Annahme: b liegt im Bild von f.

Dann existiert $y \in a$ mit $f(y) = b = \{x \in a \mid x \notin f(x)\}$.

1.Fall: $y \in f(y) \Rightarrow y \notin b$ **Widerspruch!** $\lightning$

2.Fall: $y \notin f(y) \Rightarrow y \in b$ **Widerspruch!** $\lightning$

$\Rightarrow f$ ist nicht surjektiv.
$\Rightarrow |a| < |\mathcal{P}(a)|$.

Definition 6 (Nachfolgerkardinalzahl/ Kontinuumshypothese)

Es folgt, dass es keine größte Kardinalzahl gibt. Man bezeichnet mit κ^+ die kleinste Kardinalzahl, die größer als κ ist - die *Nachfolgerkardinalzahl* von κ. Es ist

$$\omega^+ \leq |\mathcal{P}(\omega)|.$$

Die Aussage

$$\omega^+ = |\mathcal{P}(\omega)|$$

ist die *Kontinuumshypothese*(CH). Wenn ZFC widerspruchsfrei ist, kann CH weder bewiesen noch widerlegt werden.

Man zeigt leicht durch Induktion, dass für disjunkte endliche Mengen a und b

$$|a \cup b| = |a| + |b|.$$

Daraus folgt (wiederum durch Induktion), dass

$$|m \times n| = m \cdot n$$

für alle $m, n \in \omega$.

Satz

Wenn a unendlich ist, ist

$$|a \times a| = |a|.$$

Beweis

Beweis für abzählbare a siehe Buch (1) S.79.

Literatur

(1) Mathematische Logik von Martin Ziegler (2. Auflage, Birkhäuser 2017, elektrinoscher Zugriff über https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-319-44180-1).

(2) Grenzen der Mathematik von Dirk Hoffmann (3. Auflage, Springer 2018, elektronischer Zugriff über https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-662-56617-6).

Gödelscher Unvollständigkeitssatz in ZFC

Christopher Saal
Kevin Kunhart

Ruhr-Universität-Bochum

4. Januar 2019

Inhalt

Historische Einführung

David Hilbert:

- Versuch der Axiomatisierung bzw. Beweis der Widerspruchsfreiheit der gesamten Mathematik (Hilbert-Programm)

Kurt Gödel:

- Mathematiker, Philosoph und einer der bedeutendsten Logiker des 20. Jahrhunderts
- hauptsächlicher Aufgabenbereich: mathematische Logik, insbesondere Prädikatenlogik, Vollständigkeit und Entscheidungsprobleme in Arithmetik und axiomatischer Mengenlehre
- beendete Hilbert's Traum der widerspruchsfreien Mathematik
- UV-Sätze setzen Grenzen für Computerprogramme

Grundbegriffe

- **ZFC**

  Zermelo-**F**raenkel-**M**engenlehre **mit Auswahlaxiom**. ZFC ist ein sehr bewährter und weithin akzeptierter Rahmen für die gesamte Mathematik, da sich gezeigt hat, dass sich *so gut wie alle* mathematischen Aussagen so formulieren lassen, dass sich beweisbare Aussagen aus ZFC ableiten lassen.

- **Auswahlaxiom**

  A ist eine Menge von paarweise disjunkten, nichtleeren Mengen. Dann existiert eine Menge, die genau ein Element aus jedem Element aus A enthält.

- **Konsistenz (Widerspruchsfreiheit)(System T)**

  Es gibt Beweis für $A \Rightarrow$ Es gibt *keinen* Beweis für $\neg A$

Grundbegriffe

- **Inkonsistenz**

  Sei A eine Aussage. Es gibt einen Beweis für A *und* einen für ¬ A.

- **ω-Inkonsistenz**

  Keine direkte Inkonsistenz, sondern gewissermaßen eine Inkonsistenz im Unendlichen.
  Die Aussage lässt sich für **alle n**, aber auch für **nicht alle n** beweisen:

  ω eliminiert.

- **Vollständigkeit (System T)**

  Es gibt keinen Beweis für A $\Rightarrow$ Es gibt Beweis für ¬A.

Grundbegriffe

- **Unvollständigkeit**

  Es gibt keinen Beweis für A und keinen Beweis für $\neg A$.

- **$\ulcorner\psi\urcorner$-Konstante (Gödelnummer von ψ)**

  Z.B. natürliche Zahl, die einem Wort einer formalen Sprache nach bestimmten Verfahren zugeordnet wird und dieses eindeutig kennzeichnet.

- **Formales System**

  In einem formalen System lassen sich mathematische Aussagen beweisen. Es besteht aus einer formalen Sprache, einer Menge von Axiomen und einer Menge von Schlussregeln (z.B.: aus $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ folgt $A \Rightarrow C$), mit denen aus bereits bewiesenen Aussagen neue Aussagen hergeleitet werden können.

Grundbegriffe

- **Hinreichend mächtiges System**

  Ein System, das die Bernays-Löb-Axiome erfüllt + der Meta-Satz *Jedes hinreichend mächtige, rekursiv aufzählbare formale System ist entweder widersprüchlich oder unvollständig* muss innerhalb des Systems darstellbar sein

- **Math. Theorie**

  Menge aller im System herleitbaren Aussagen

Formulierung der Sätze in Worten

1. Unvollständigkeitssatz

Jedes hinreichend mächtige, rekursiv aufzählbare formale System ist entweder widersprüchlich oder unvollständig.

2. Unvollständigkeitssatz

Jedes hinreichend mächtige konsistente formale System kann die eigene Konsistenz nicht beweisen.

Lügnerparadoxon

Ein Lügner-Paradoxon ist in der Logik ein Paradoxon, das entsteht, wenn ein Satz seine eigene Falschheit (bzw. Unwahrheit) behauptet.

Das einfachste Beispiel eines Lügner-Paradoxons ist der folgende selbstbezügliche Satz:

Lügnerparadoxon

Ein Lügner-Paradoxon ist in der Logik ein Paradoxon, das entsteht, wenn ein Satz seine eigene Falschheit (bzw. Unwahrheit) behauptet.

Das einfachste Beispiel eines Lügner-Paradoxons ist der folgende selbstbezügliche Satz:

"Dieser Satz ist falsch."

Lügnerparadoxon

Ein Lügner-Paradoxon ist in der Logik ein Paradoxon, das entsteht, wenn ein Satz seine eigene Falschheit (bzw. Unwahrheit) behauptet.

Das einfachste Beispiel eines Lügner-Paradoxons ist der folgende selbstbezügliche Satz:

"Dieser Satz ist falsch."

Gödel's Idee:

Lügnerparadoxon

Ein Lügner-Paradoxon ist in der Logik ein Paradoxon, das entsteht, wenn ein Satz seine eigene Falschheit (bzw. Unwahrheit) behauptet.

Das einfachste Beispiel eines Lügner-Paradoxons ist der folgende selbstbezügliche Satz:

"Dieser Satz ist falsch."

Gödel's Idee:

Aussage ϕ: "Ich bin nicht ableitbar."

Idee: 1. Satz

1. Schritt: Gödelisierung

Idee: 1. Satz

1. Schritt: Gödelisierung

z.B.

Idee: 1. Satz

1. Schritt: Gödelisierung

z.B.

Aussage 1: "$1 + 1 = 2$"

Beweisidee

Idee: 1. Satz

1. Schritt: Gödelisierung

z.B.
Aussage 1: "$1+1=2$"
Aussage 2: "$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$"

Idee: 1. Satz

1. Schritt: Gödelisierung

z.B.

Aussage 1: "$1 + 1 = 2$"

Aussage 2: "$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$"

...

Idee: 1. Satz

1. Schritt: Gödelisierung

z.B.
Aussage 1: "$1 + 1 = 2$"
Aussage 2: "$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$"
...
Aussage 34: "$2 + 3 = 6$"

Idee: 1. Satz

1. Schritt: Gödelisierung

z.B.
Aussage 1: "$1 + 1 = 2$"
Aussage 2: "$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$"
...
Aussage 34: "$2 + 3 = 6$"
Aussage 35: "Die Aussage mit der Nummer 34 ist falsch"

Idee: 1. Satz

1. Schritt: Gödelisierung

z.B.
Aussage 1: "$1 + 1 = 2$"
Aussage 2: "$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$"
...
Aussage 34: "$2 + 3 = 6$"
Aussage 35: "Die Aussage mit der Nummer 34 ist falsch"

Wir nehmen nun folgende Aussage:

"Die Aussage mit der Nummer x ist nicht ableitbar."

Beweisidee

2. Schritt: Diagonalisierung

Wir wollen eine Aussage, die ihre eigene Unbeweisbarkeit behauptet.
Hierzu lässt sich das **Diagonallemma** anwenden.
Es besagt, dass es in der Arithmetik und stärkeren formalen Systemen für jede Formel F(x) mit freier Variable x eine Aussage ϕ gibt.

Beweisidee

2. Schritt: Diagonalisierung

Wir wollen eine Aussage, die ihre eigene Unbeweisbarkeit behauptet.
Hierzu lässt sich das **Diagonallemma** anwenden.
Es besagt, dass es in der Arithmetik und stärkeren formalen Systemen für jede Formel F(x) mit freier Variable x eine Aussage ϕ gibt.

So gibt es eine Einsetzung ϕ für x, sodass der Satz mit der Nummer ϕ äquivalent ist zur Aussage:

"Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar."

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage ϕ ist ableitbar

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage ϕ ist ableitbar $\Leftrightarrow$ Aussage $\neg A$

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage ϕ ist ableitbar $\Leftrightarrow$ Aussage $\neg A$ Widerspruch!

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage ϕ ist ableitbar $\Leftrightarrow$ Aussage $\neg A$ Widerspruch!

Ang. Aussage $\neg A$ **ist ableitbar**

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage ϕ ist ableitbar $\Leftrightarrow$ Aussage $\neg A$ Widerspruch!

Ang. Aussage $\neg A$ **ist ableitbar**

$\Leftrightarrow$ Aussage ϕ

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage ¬A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage ϕ ist ableitbar $\Leftrightarrow$ Aussage $\neg A$ Widerspruch!

Ang. Aussage $\neg A$ **ist ableitbar**

$\Leftrightarrow$ Aussage ϕ

wegen Stärke des Systems

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage ϕ ist ableitbar $\Leftrightarrow$ Aussage $\neg A$ Widerspruch!

Ang. Aussage $\neg A$ **ist ableitbar**

$\Leftrightarrow$ Aussage ϕ

wegen Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage A

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**
wegen Konsistenz und Stärke des Systems
$\Rightarrow$ Aussage ϕ ist ableitbar $\Leftrightarrow$ Aussage $\neg A$ Widerspruch!

Ang. Aussage $\neg A$ **ist ableitbar**
$\Leftrightarrow$ Aussage ϕ
wegen Stärke des Systems
$\Rightarrow$ Aussage A Widerspruch!

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage ϕ ist ableitbar $\Leftrightarrow$ Aussage $\neg A$ Widerspruch!

Ang. Aussage $\neg A$ **ist ableitbar**

$\Leftrightarrow$ Aussage ϕ

wegen Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage A Widerspruch!

$\Rightarrow$ Wir sehen: Aussage A und Aussage $\neg A$ sind nicht ableitbar.

Somit ist das System **unvollständig**.

Beweisidee

Idee: 2. Satz

Sei S ein formales und konsistentes System, das so stark ist, dass darin der 1. UVS formalisiert und bewiesen werden kann.

Beweisidee

Idee: 2. Satz

Sei S ein formales und konsistentes System, das so stark ist, dass darin der 1. UVS formalisiert und bewiesen werden kann.

Also beweist S die Aussage:

Beweisidee

Idee: 2. Satz

Sei S ein formales und konsistentes System, das so stark ist, dass darin der 1. UVS formalisiert und bewiesen werden kann.

Also beweist S die Aussage:
"Wenn S konsistent ist, dann ist der Satz "Ich bin nicht beweisbar" nicht in S beweisbar."

Beweisidee

Idee: 2. Satz

Sei S ein formales und konsistentes System, das so stark ist, dass darin der 1. UVS formalisiert und bewiesen werden kann.

Also beweist S die Aussage:
"Wenn S konsistent ist, dann ist der Satz "Ich bin nicht beweisbar" nicht in S beweisbar."

Wir nehmen an, dass S die Aussage:
"S ist konsistent" beweist.

Beweisidee

Idee: 2. Satz

Sei S ein formales und konsistentes System, das so stark ist, dass darin der 1. UVS formalisiert und bewiesen werden kann.

Also beweist S die Aussage:
"Wenn S konsistent ist, dann ist der Satz "Ich bin nicht beweisbar" nicht in S beweisbar."

Wir nehmen an, dass S die Aussage:
"S ist konsistent" beweist.

Kombinieren wir beide Aussagen, erhalten wir in S einen Beweis der Aussage:
"Der Satz: "Ich bin nicht beweisbar" ist nicht in S beweisbar."

Beweisidee

Idee: 2. Satz

Sei S ein formales und konsistentes System, das so stark ist, dass darin der 1. UVS formalisiert und bewiesen werden kann.

Also beweist S die Aussage:
"Wenn S konsistent ist, dann ist der Satz "Ich bin nicht beweisbar" nicht in S beweisbar."

Wir nehmen an, dass S die Aussage:
"S ist konsistent" beweist.

Kombinieren wir beide Aussagen, erhalten wir in S einen Beweis der Aussage:
"Der Satz: "Ich bin nicht beweisbar" ist nicht in S beweisbar."
$\Leftrightarrow$ "Ich bin nicht beweisbar"

Beweisidee

Idee: 2. Satz

Sei S ein formales und konsistentes System, das so stark ist, dass darin der 1. UVS formalisiert und bewiesen werden kann.

Also beweist S die Aussage:
"Wenn S konsistent ist, dann ist der Satz "Ich bin nicht beweisbar" nicht in S beweisbar."

Wir nehmen an, dass S die Aussage:
"S ist konsistent" beweist.

Kombinieren wir beide Aussagen, erhalten wir in S einen Beweis der Aussage:
"Der Satz: "Ich bin nicht beweisbar" ist nicht in S beweisbar."
$\Leftrightarrow$ "Ich bin nicht beweisbar" Widersruch zum 1. UVS

Beweisidee

Idee: 2. Satz

Sei S ein formales und konsistentes System, das so stark ist, dass darin der 1. UVS formalisiert und bewiesen werden kann.

Also beweist S die Aussage:
"Wenn S konsistent ist, dann ist der Satz "Ich bin nicht beweisbar" nicht in S beweisbar."

Wir nehmen an, dass S die Aussage:
"S ist konsistent" beweist.

Kombinieren wir beide Aussagen, erhalten wir in S einen Beweis der Aussage:
"Der Satz: "Ich bin nicht beweisbar" ist nicht in S beweisbar."
$\Leftrightarrow$ "Ich bin nicht beweisbar" Widersruch zum 1. UVS

Also ist S entweder **inkonsistent** oder es kann die **eigene Konsistenz nicht beweisen**.

Formaler Beweis

Gödelisierung:

Zunächst wird jeder L_{ME}-Formel ψ eine Konstante $\ulcorner\psi\urcorner$ (Gödelnummer) zugeordnet.

$$\ulcorner\dot{=}\urcorner = (0,0)$$

$$\ulcorner\wedge\urcorner = (0,1)$$

$$\ulcorner\neg\urcorner = (0,2)$$

$$\ulcorner(\urcorner = (0,3)$$

$$\ulcorner)\urcorner = (0,4)$$

$$\vdots$$

Für eine Formel $\psi = \zeta_0\,\zeta_1 \ldots \zeta_{n-1}$ der Länge n setzen wir $\ulcorner\psi\urcorner = \{(0,\ulcorner\zeta_0\urcorner),\ldots,(n-1,\ulcorner\zeta_{n-1}\urcorner)\}$.

Diese Nummerierung wird auf endliche Folgen erweitert.

Formaler Beweis

Diagonalisierung:

Satz 11.1: (Fixpunktsatz)

Für jede L_{ME}-Formel $\Sigma(x)$ gibt es eine Aussage ϕ mit

$$ZFC \vdash \quad \phi \leftrightarrow \Sigma(\ulcorner \phi \urcorner).$$

Wir brauchen das folgende Lemma:

Lemma:

Es gibt eine in ZFC definierbare Funktion *Sub* mit

$$ZFC \vdash \quad \ulcorner \psi(\ulcorner \chi \urcorner) \urcorner \doteq Sub(\ulcorner \psi \urcorner, \ulcorner \chi \urcorner)$$

für alle L_{ME}-Formeln $\psi(x)$ und χ.

Formaler Beweis

Beweis:

Sub beschreibt einfach die Einsetzung in Formeln.

Sei nun $\psi(v_0)$ die L_{ME}-Formel die zu $\Sigma(Sub(v_0, v_0))$ äquivalent ist.
Dann sind in ZFC folgende Aussagen äquivalent:

$$\psi(\ulcorner\psi\urcorner) \sim \Sigma(Sub(\ulcorner\psi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner)) \sim \Sigma(\ulcorner\psi(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner)$$

Setze nun $\phi = \psi(\ulcorner\psi\urcorner)$

$$\Rightarrow \phi \sim \Sigma(\ulcorner\phi\urcorner). \qquad \square$$

Formaler Beweis

Das Beweisbarkeitsprädikat:

Sei *Bew(x)* die Formel, die (in ZFC) ausdrückt, dass x eine in ZFC beweisbare Aussage ist.

Folgende Löb-Axiome müssen jedoch erfüllt werden:

$$L1 : [ZFC \vdash \phi\,] \;\Rightarrow\; [ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner)].$$

$$L2 : ZFC \vdash [Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner\psi\urcorner)].$$

$$L3 : ZFC \vdash [Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner)].$$

Formaler Beweis

Folgerung 11.2:

11.1: $ZFC \vdash \phi \to \psi \Rightarrow ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \to Bew(\ulcorner\psi\urcorner)$

11.2: $ZFC \vdash [Bew(\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner) \leftrightarrow (Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner\psi\urcorner))]$

Beweis:

(11.1) Sei $ZFC \vdash \phi \to \psi \overset{L1}{\Rightarrow} ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi \to \psi\urcorner)$.

$\overset{L2}{\Rightarrow} ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \to Bew(\ulcorner\psi\urcorner)$.

Definition:

Sei F eine Formel, deren Negation allgemeingültig ist, z.B. $\neg 0 \doteq 0$. Die Aussage $CON_{ZFC} = \neg Bew(\ulcorner F\urcorner)$ drückt dann die Konsistenz von ZFC aus.

Formaler Beweis

Satz: (2. UVS)

Wenn ZFC konsistent ist, ist CON_{ZFC} in ZFC unbeweisbar.

Beweis:

Wenn wir den Satz bewiesen haben, haben wir also gezeigt, dass

$$ZFC \vdash CON_{ZFC} \leftrightarrow \neg Bew(\ulcorner CON_{ZFC} \urcorner).$$

Sei ϕ eine Formel, die

$$ZFC \vdash \phi \leftrightarrow \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \qquad (11.3) \qquad \text{Gödelsatz!}$$

erfüllt.

Wir zeigen zuerst, dass folgendes gilt:

$$ZFC \vdash \phi \leftrightarrow CON_{ZFC} \qquad (11.4)$$

Formaler Beweis

Beweis: $\quad ZFC \vdash \phi \leftrightarrow CON_{ZFC} \qquad (11.4).$

$$ZFC \vdash F \to \phi \quad \overset{11.1}{\Rightarrow} \quad ZFC \vdash Bew(\ulcorner F \urcorner) \to Bew(\ulcorner \phi \urcorner).$$

Also gilt: $ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \to \neg Bew(\ulcorner F \urcorner)$

$$\Leftrightarrow ZFC \vdash \phi \to CON_{ZFC}.$$

Aus $ZFC \vdash \phi \to \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner)$

$$\overset{11.1}{\Rightarrow} ZFC \vdash Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \to Bew(\ulcorner \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \urcorner).$$

$$\overset{L3}{\Rightarrow} ZFC \vdash Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \to Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \urcorner)$$

$$\Rightarrow ZFC \vdash Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \to (Bew(\ulcorner \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \urcorner) \wedge Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \urcorner)).$$

Formaler Beweis

Beweis: $ZFC \vdash \phi \leftrightarrow CON_{ZFC}$ (11.4).

$ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \rightarrow (Bew(\ulcorner\neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner))$.

$\overset{11.2}{\Rightarrow} ZFC \vdash (Bew(\ulcorner\neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner)) \rightarrow Bew(\ulcorner F\urcorner)$.

Zur Erinnerung: $CON_{ZFC} = \neg Bew(\ulcorner F\urcorner)$.

Also gilt:

$Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \rightarrow \neg CON_{ZFC}$, das heißt dann: $ZFC \vdash CON_{ZFC} \rightarrow \phi$. $\square$

Formaler Beweis

Satz: (2. UVS)

Wenn ZFC konsistent ist, ist CON_{ZFC} in ZFC unbeweisbar.

Beweis:

Angenommen:

$$ZFC \vdash CON_{ZFC} \overset{11.4}{\Rightarrow} ZFC \vdash \phi \overset{L1}{\Rightarrow} ZFC \vdash Bew(\ulcorner \phi \urcorner)$$

$$\text{aber } ZFC \vdash \phi \overset{11.3}{\Rightarrow} ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner).$$

Somit wäre ZFC **inkonsistent**. $\square$

Formaler Beweis

Folgerung: (Tarskis Satz über die Wahrheitsdefiniton)

Wenn ZFC widerspruchsfrei ist, gibt es keine Formel $\mathcal{W}(x)$, so dass für alle Aussagen ϕ gilt:

$$ZFC \vdash \phi \leftrightarrow \mathcal{W}(\ulcorner \phi \urcorner)$$

Beweis:

Wähle ein ϕ mit

$$ZFC \vdash \phi \leftrightarrow \neg \mathcal{W}(\ulcorner \phi \urcorner).$$

Formaler Beweis

Erstellung einer Liste $\phi_0, \phi_1, ...$ aller in ZFC beweisbaren Aussagen.

"ϕ ist die n-te beweisbare Aussage" lässt sich nun mit einer L_{ME}-Formel *Bew(x,y)* ausdrücken, die die folgenden Eigenschaften hat:

Für alle $n = 0, 1, \ldots$ und alle Aussagen ϕ gilt:

- $\phi = \phi_n \Rightarrow ZFC \vdash Bew(\ulcorner \phi \urcorner, n)$. (11.5)
- $\phi \neq \phi_n \Rightarrow ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner, n)$. (11.6)

Formaler Beweis

Rossersatz:

Sei R eine Aussage mit

$$ZFC \vdash R \leftrightarrow \forall y \in \omega(Bew(\ulcorner R \urcorner, y) \rightarrow \exists\, z < y(Bew(\ulcorner \neg R \urcorner, z)))$$

John Barkley Rosser:

Anstelle des Lügner-Paradoxon "Ich bin nicht beweisbar" benutzt er die Aussage:

"Zu jedem Beweis für mich gibt es einen kürzeren Beweis für meine logische Negation."

Formaler Beweis

Satz: (**1. UVS**)

Wenn ZFC konsistent ist, ist R unabhängig von ZFC.

Beweis:

Für beliebiges ψ sei ψ^* die Aussage

$$\forall y \in \omega(Bew(\ulcorner\psi\urcorner, y) \to \exists\, z < y(Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, z)).$$

Wir zeigen zuerst:

$$ZFC \vdash \psi \Rightarrow ZFC \vdash \neg\psi^* \qquad (11.7)$$

$$ZFC \vdash \neg\psi \Rightarrow ZFC \vdash \psi^* \qquad (11.8)$$

Formaler Beweis

Beweis von 11.7: $ZFC \vdash \psi \Rightarrow ZFC \vdash \neg\psi^*$

Sei $ZFC \vdash \psi \overset{11.5}{\Rightarrow} \exists\, n \text{ mit } ZFC \vdash Bew(\ulcorner\psi\urcorner, n)$.

Da ZFC konsistent, $\overset{11.6}{\Rightarrow} ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, m)\ \forall m$

$\Rightarrow ZFC \vdash \neg\,[\,\exists\, z < n\colon Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, z)\,]$

$\Rightarrow ZFC \vdash \forall z < n\colon \neg Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, z) \Rightarrow ZFC \vdash \neg\psi^*$ $\square$

$$\neg(\psi^*) = \neg(\forall n \in \omega(Bew(\ulcorner\psi\urcorner, n)) \to \exists\, z < n\colon Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, z)).$$

$$= \exists n \in \omega(Bew(\ulcorner\psi\urcorner, n) \wedge \forall z < n\colon \neg Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, z)).$$

Formaler Beweis

Beweis von 11.8: $ZFC \vdash \neg\psi \Rightarrow ZFC \vdash \psi^*$

Sei $ZFC \vdash \neg\psi \overset{11.5}{\Rightarrow} \exists\, m \textit{ mit } ZFC \vdash Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, m)$.

Da ZFC konsistent $\overset{11.6}{\Rightarrow} ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner\psi\urcorner, n)\ \forall n$.

$\Rightarrow ZFC \vdash \forall y \in \omega(Bew(\ulcorner\psi\urcorner, y) \to m < y)$

$\Rightarrow ZFC \vdash \psi^*$ $\square$

Formaler Beweis

Satz: (1. UVS)

Wenn ZFC konsistent ist, ist R unabhängig von ZFC.

Beweis:

Wähle $\psi = R$

$ZFC \vdash R \overset{11.7}{\Rightarrow} ZFC \vdash \neg R$

$ZFC \vdash \neg R \overset{11.8}{\Rightarrow} ZFC \vdash R$

Also gilt: $ZFC \vdash R \Leftrightarrow ZFC \vdash \neg R$.

In beiden Fällen wäre ZFC **inkonsistent**. $\square$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit !!!