Historische Einführung

Malik Toprak und Irfan Acun

20.12.2018

Wahrheit und Beweisbarkeit

Abbildung: Gottfried Wilhelm Leibniz, ca. 1700.

Gottfried Wilhelm Leibniz

- 21 juni 1646 in Leipzig geboren
- war ein deutscher Philosoph, Mathematiker, Diplomat, Historiker und politischer Berater der frühen Aufklärung
- gefesselt davon eine Universalsprache zu entwickeln (Characteristica Universalis)
- für diese Sprache soll ein Regelwerk (Calculus Ratiocinator) erschaffen werden, um Wahrheitsgehalt zu berrechnen
- war der Überzeugung das Projekt mit ausgewählten Wissenschaftlern zu verwirklichen
- Chance wurde ihm nie gegeben
- starb im Alter von 70 Jahren am 14 November 1716

Wahrheit und Beweisbarkeit

- im 19. Jahrhundert führten die Fortschritte im Bereich der symbolischen Logik zu der Entwicklung formaler Systeme
- heute besitzen wir die künstliche Sprache der Prädikatenlogik und Aussagenlogik
- bis in das 20.Jahrhundert zweifelte kaum ein Mathematiker daran, dass für jede mathematische Aussage ein Beweis oder Gegegenbeweis gefunden werden kann
- heute wissen wir, dass sich der Begriff der Wahrheit und Beweisbarkeit nicht übereinstimmen lassen

Vermutungen

Vermutung 1

Jede gerade natürliche Zahl $n > 2$ lässt sich als Summe zweier Primzahlen schreiben.

Vermutung 2

Es existiert unendlich viele Zahlen n mit der Eigenschaft, dass n und $n + 2$ Primzahlen sind.

Auf den Spuren der Unendlichkeit

- die moderne Mathematik hat ihre Wurzeln im 19. Jahrhundert
- einheitliche Grundlage der Mathematik ist den präzisesten Wissenschaftlern nicht gelungen
- heute bezeichnen wir diese Grundlage als Mengenlehre
- Jean Baptiste Fourier löste den Anstoß zur Begründung der Mengenlehre
- jede beliebige Funktion lässt sich als trigonometrische Reihe darstellen
- für stetige Funktionen weitgehend bewiesen
- immer mehr Mathematiker gingen dazu über die Ergebnisse auf den unstetigen Fall zu übertragen
- der deutsche Mathematiker Georg Cantor gehörte dazu

Georg Cantor

Abbildung: Georg Cantor, ca.1910

Georg Cantor

- geboren am 3. März 1845 in Sankt Petersburg
- absolvierte sein Studium von 1862 bis 1867 in Zürich, Göttingen und Berlin
- Größen wie Weierstraß, Kummer und Kronecker zählten zu seinen Lehrern
- Begründer der Mengenlehre
- führte die Mathematik in die Moderne, durch die Untersuchung des Unendlichen
- anfangs starker Widerstand (insbesondere Leopold Kronecker)
- erkrankte im Alter von 39 an manischer Deppression
- starb im Alter von 72 Jahren am 6. Januar 1918

Auf den Spuren der Unendlichkeit

- schwächte die Annahme der Stetigkeit schrittweise ab
- zeigte zuerst, dass Fouriers Vermutung auf Funktionen mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen zutrifft
- versuchte seine Ergebnisse auf Funktionen mit unendlich vielen Unstetigkeitsstellen zu übertragen
- man konnte sowohl endliche als auch unendliche Mengen in der gleichen Weise untersuchen
- der Schlüssel für den Umgang mit dem Unendlichen liegt in der Betrachtung der Mächtigkeit
- sie wird mit $|M|$ bezeichnet und entspricht für endliche Mengen die Anzahl ihrer Elemente

Definition 1.1 (Mächtigkeit)

Definition 1.1

Mit M_1 und M_2 seien zwei beliebige Mengen gegeben. M_1 und M_2 heißen gleichmächtig, geschrieben als

$$|M_1|=|M_2|$$

wenn eine bijektive Abbildung $f : M_1 \to M_2$ existiert. Wir schreiben

$$|M_1| \leq |M_2|$$

wenn eine injektive Abbildung $f : M_1 \to M_2$ existiert.

Auf den Spuren der Unendlichkeit

- Cantor zeigte die Gleichmächtigkeit von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und der Menge der algebraischen Zahlen
- doch seine bedeutsamere Entdeckung war eine andere
- Anzahl der reellen Zahlen übersteigt jene der natürlichen Zahlen so sehr, dass es unmöglich ist eine eins zu eins Zuordnung herzustellen
- Überabzählbarkeit der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Definition 1.2 (Abzählbarkeit, Überabzählbarkeit)

Definition

Eine Menge M heißt

- abzählbar, falls $|M| = |\mathbb{N}|$
- höchstens abzählbar, falls $|M| \leq |\mathbb{N}|$
- überabzählbar, falls $|M| > |\mathbb{N}|$

Auf den Spuren der Unendlichkeit

- Cantors Mengenbegriff wurde von vielen seiner Zeitgenossen abgelehnt und von einigen sogar bekämpft
- dies lässt sich nur im historischen Kontext verstehen
- er schuf seinen Mengenbegriff in einer Zeit, in der die Diskussion um das Wesen der Unendlichkeit in vollem Gange war
- man stritt bezüglich der aktualen Unendlichkeit und der potentiellen Unendlichkeit

Gottlob Frege

- So wie Cantor sah der deutsche Mathematiker Gottlob Frege in der aktual Unendlichkeit den Schlüssel zu einer modernen Mathematik

Abbildung: Gottlob Frege, ca.1878

Gottlob Frege

- geboren am 8 November 1848 in Wismar
- deutscher Logiker, Mathematiker und Philosoph
- zählt zu den Begründern der mathematischen Logik und der analytischen Philosophie
- vertrat die Auffassung, dass die Mathematik ein Teil der Logik sei
- Frege zog sich nach der niederschmetternden Entdeckung der Russell'schen Antinomie zurück
- publizierte keine bedeutenden Arbeiten mehr

Macht der Symbole

- 1879 publizierte Frege sein wichtigstes Werk, die Begriffsschrift
- er schuf das was wir heute als symbolische Logik bezeichnen
- ihm gelang es eine künstliche Sprache zu entwickeln, die ausdrucksstark genug war, um die gesamte gewöhnliche Mathematik zu formalisieren
- man trat seiner Arbeit mit Gleichgültigkeit entgegen

Was war es, die Freges Arbeit so besonders machte ?

- paar Jahre zuvor hatte Georg Bode mit der Aussagenlogik das Grundgerüst erschaffen, um logische Relationen zwischen Elementaraussagen symbolischer Operatoren auszudrücken
- Frege erkannte, dass sich die Aussagenlogik als stark genug entpuppte, um die Struktur der Elementaraussagen selbst zu formulieren und nicht nur die Zusammenhänge zwischen elementaren Aussagen zu beschreiben

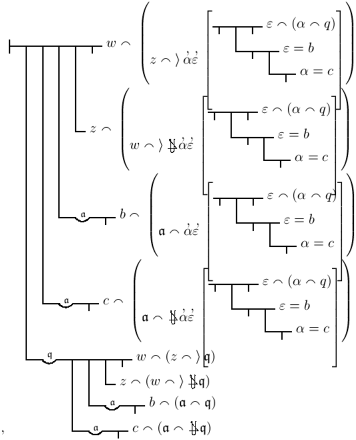
Beispiel (Aussagenlogik)

„Alle Menschen sind sterblich"
Wird in der folgenden Implikationsform dargestellt :
„Für alle x gilt: Wenn x ein Mensch ist, dann ist x sterblich"
Diese Aussage lässt sich auch in der Form
$\forall x(Mensch(x) \rightarrow Sterblich(x))$ oder kürzer als: $\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$ ausdrücken.

Macht der Symbole

- Mit der Begriffsschrift ist es Frege gelungen, dass logische Denken auf eine symbolische Ebene zu heben
- sein Ziel war es sämtliche mathematische Begriffe und Konzepte auf elementare Begriffe der Logik zurückzuführen
- er sah die Logik nicht als Teil der Mathematik, sondern die Mathematik als Teil der Logik
- einen wichtigen Teilerfolg erzielte er im Jahre 1884 mit der Publikation der "Grundlagen der Arithmetik"
- er unternahm den Versuch den Zahlenbegriff formal zu definieren

Freges Begriffsschrift



Grundlagenkrise

- Im Jahre 1902 erhät Frege einen Brief des britischen Mathematikers und Philosophen Bertrand Russell
- Frege erreichte der Brief zu der Zeit, als er den zweiten Band der Grundgesetze der Arithmetik fertigstellte
- Viele Jahre arbeitete er an sein Werk und musste anschließend zusehen, wie sie auf einen Schlag in Trümmern lag
- was er las, hat nicht nur seine Arbeit erschüttert, sondern die gesamte Mathematik in die größte Krise gestürzt
- für große Änderungen war es zu spät
- Was konnte Freges Arbeit so grundlegend erschüttern ?

Bertrand Russel

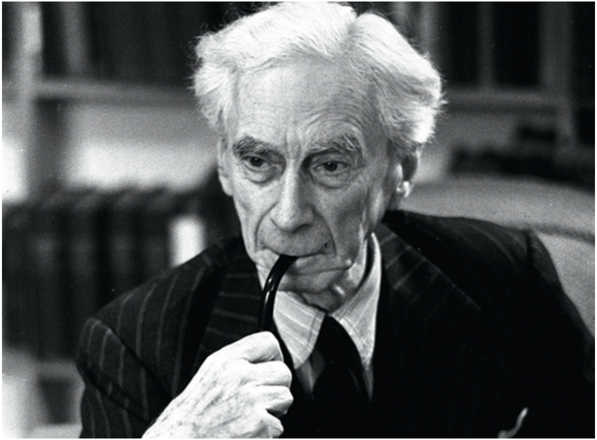


Abbildung: Bertrand Russel, ca.1916

Bertrand Russel

- Bertrand Russel wurde am 18. Mai 1872 in Trellech geboren
- Schon in frühen Jahren wurde Russels einzigartige Begabung für Mathematik und Philosophie sichtbar
- In den Jahren 1890 bis 1894 studierte er Mathematik und lernte in dieser Zeit North Whitehead kennen
- verfasste eine Vielzahl bedeutender Werke über philosophische Themen
- wurde im Jahr 1950 mit den Literaturnobelpreis geehrt
- durch seine literaische Arbeit gelang er zu Weltruhm
- viele Wissen nicht, dass sich hinter dem berühmten Philosophen zugleich einer der größten Mathematiker des 20. Jahrhunderts verbirgt
- starb im Jahre 1970

Grundlagenkrise

- Nach Russels Ansicht musste es durch die geschickte Abwandlung der zugrunde gelegten Axiome möglich sein, genügend Kontrolle über den Mengenbegriff zu erlangen, um die Mathematik von Widersprüchen zu befreien
- er versuchte ein widerspruchsfreies Fundament mit dem Mathematiker Alfred North Whitehead aufzubauen
- Nach zehn Jahren intensiver Arbeit schufen sie die "Principia Mathematica"
- Sie haben somit versucht, alle mathematischen Erkenntnisse aus einer kleinen Menge von Axiomen herzuleiten

Principia Mathematica

360 PROLEGOMENA TO CARDINAL ARITHMETIC [PART II

*54·42. $\vdash :: \alpha \in 2 . \supset :. \beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv . \beta \in \iota``\alpha$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}4 . \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \equiv : \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \alpha : \exists ! \beta :$

[*24·53·56 . *51·161] $\equiv : \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \alpha$ (1)

$\vdash . *54{\cdot}25 . \text{Transp} . *52{\cdot}22 . \supset \vdash : x \neq y . \supset . \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`x . \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`y :$

[*13·12] $\supset \vdash : \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset . \alpha \neq \iota`x . \alpha \neq \iota`y$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv : \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y :$

[*51·235] $\equiv : (\exists z) . z \in \alpha . \beta = \iota`z :$

[*37·6] $\equiv : \beta \in \iota``\alpha$ (3)

$\vdash . (3) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . *54{\cdot}101 . \supset \vdash . \text{Prop}$

*54·43. $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

[*51·231] $\equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

[*13·12] $\equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$ (1)

$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$ (2)

$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash . \text{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Abbildung: Formaler Beweis der arithmetischen Beziehung 1+1=2

Axiomatische Mengenlehre

Antnomien sollen durch eine präzise Axiomatisierung der Mengenlehre (und ihrer logischen Grundlagen) vermieden werden. Beispiele:

- Cantor (1898, unveröffentlicht)
- Russellsche Typentheorie (1903)
- Ernst Zermelo (1907) sowie Abraham Fraenkel und Thoralf Skolem (1921)
- von Neumann-Bernays-Gödel (1925-1940)
- Morse-Kelley (1949)
  Wir betrachten die moderne Version von Zermelo Fraenkel (ZF)

Semantik von ZF

- die Variablen u, x, y und z stehen für Mengen
- man kann in ZF nur über Mengen reden. Es gibt keine anderen Objekte!
- $(x = y)$ soll bedeuten, dass die beiden Mengen identisch sind
- $(x \in y)$ soll bedeuten, dass die Menge x ein Element der Menge y ist
- $(\varphi \vee \psi)$ soll bedeuten, dass (mindestens) eine der Aussagen $\varphi und \psi$ wahr ist
- $(\neg\varphi)$ soll bedeuten, dass die Aussage φ nicht wahr ist
- $(\exists x \varphi)$ soll bedeuten, dass es (mindestens) eine Menge x gibt, für die φ wahr ist

Paarmengenaxiom

$$\boxed{\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \iff u = x \vee u = y)}$$

Zu zwei vorgegebenen Mengen gibt es eine Menge, die genau diese beiden Mengen (und keine anderen) enthält.

- diese Menge ist eindeutig bestimmt
- Man nennt sie das ungeordnete Paar oder die Paarmenge von x und y und beschreibt sie als {y,x} oder {x,y}
- gilt $x = y$, so schreibt man einfach {x} und nennt die Menge das Singleton von x

Hilberts Programm und Gödels Beitrag

- In der euklidischen Geometrie ist die Winkelsumme in jedem Dreieck 180° , in der hyperbolischen ist sie immer kleiner als 180°, in der elliptischen immer größer als 180°
- gibt es mehrere mathematische Wahrheiten ?
- In Freges Werk "Grundlagen der Arithmetik", das der ganzen Mathematik ein sicheres Fundament verschaffen sollte, entdeckt Bertrand Russel einen Widerspruch, der auch die Mengenlehre von Cantor betrifft
- Vertraut man noch den mathematischen "Wahrheiten"?

David Hilbert

Abbildung: David Hilbert, ca.1912

David Hilbert

- wurde am 21.1.1862 in Königsberg geboren
- beendete 1884 sein Mathematikstudium
- wechselte mehrmals sein Forschungsscherwerpunkt
- hinterließ seine Spuren in der Geometrie, Zahlentheorie, der Analysis und der theoretischen Physik
- 1900 hielt er auf dem internationalen Kongress der Mathematik seine berühmte Jahrhunderrede
- trug 23 ungelöste Probleme vor
- noch einige sind bis heute noch offen
- starb 1943 im Alter von 81 Jahren

Das Hilbertprogramm

- Metamathematik: Untersuchung der Grundlagen der Mathematik mit mathematischen Methoden
- Ziel: Axiomatisierung der gesamten Mathematik
  - Peano-Arithmetik
  - Hilberts Grundlagen der Geometrie
  - Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre
- Beschränkung auf finite Methoden: Formalismus

Formalismus

- mathematische Aussagen sind Zeichenketten (Strings) in einer gewissen Syntax
- diese Syntax muss von einem Computerprogramm verifiziert werden können.
- Ein Beweis der Aussage φ ist eine Liste von Aussagen
- φ ist die letzte Aussage der Liste
- jede Aussage in der Liste ist ein Axiom
- ... oder folgt aus Aussagen von ihr
- Die Eigenschaften „ist ein Axiom" und "folgt aus"müssen von einem Computerprogramm verifiziert werden können
- Das zusammen nennt man Theorie

Mizar

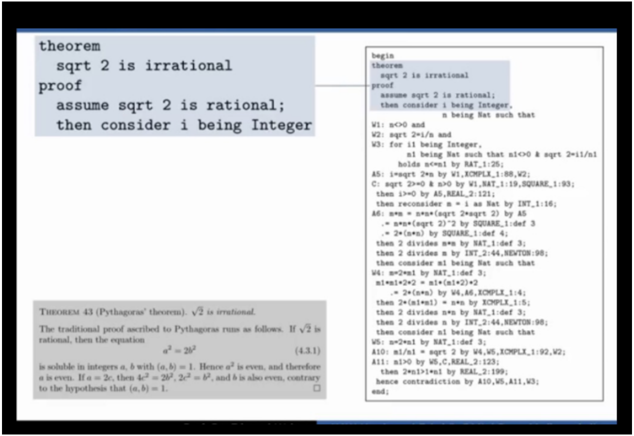


Abbildung: Beweis $\sqrt{2}$ ist irrational

Das Hilbertprogramm

- Metamathematik: Untersuchung der Grundlagen der Mathematik mit mathematischen Methoden
- Ziel: Axiomatisierung der gesamten Mathematik
  - Peano Arithmetik
  - Hilberts Grundlagen der Geometrie
  - Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre
- Beschränkung auf finite Methoden: Formalismus
- Entscheidbarkeit
  Alle mathematischen Beweise sind mechanisch nachvollziehbar
- Wiederspruchsfreihet:
  Man kann keine falschen Aussagen herleiten
- Vollständigkeit:
  Man kann alle wahren Aussagen herleiten

Kurt Gödel

Abbildung: Kurt Gödel ca. 1961

Kurt Gödel

- geboren am 28 April 1906 im österreichisch-ungarischen Brünn
- mit 17 begann er das Studium der theoretischen Physik
- Philipp Furtwänglers Vorlesung über Zahlentheorie lenkte Gödels Interesse auf die Mathematik
- war sich der Machtergreifung Hitlers zunächst nicht bewusst und floh 1940 in die USA
- fand in Albert Einstein einen lebenslangen Freund
- starb am 14. Januar 1978 an einer herbeigeführten Unterernährung, da er an starker paranoia und Depression leidete

Gödels Unvollständigkeitssätze

Erster Unvollständigkeitssatz:

Wenn eine Theorie hinreichend expressiv ist, dann ist sie entweder unvollständig oder nicht widerspruchsfrei

Zweiter Unvollständigkeitssatz:

Wenn eine Theorie hinreichend expressiv und widerspruchsfrei ist, dann kann sie ihre eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen

Proseminar

Agata Bisgwa
Ruhr-Universität Bochum
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Christoph Thäle

WS 2018/19
20. Dezember 2018

1 Strukturen und Formeln

Definition 1.1 Eine *Struktur* ist ein Paar $\mathfrak{A} = (A,\, J)$, wobei A eine nicht-leere Menge und J eine Familie von Elementen aus A, Operationen und Relationen auf A ist.

Beispiele 1.1.1

· eine Gruppe $(G, e, \circ, ^{-1})$ ist eine Struktur

· ein topologischer Raum ist keine Struktur

Definition 1.2 Eine *Sprache* ist eine Menge von Konstanten, Funktionszeichen und Relationszeichen. Funktionszeichen und Relationszeichen haben eine (positive) Stelligkeit.

Beispiele 1.2.1

· die Gruppen-Sprache $L_G = \{e, \circ, ^{-1}\}$

· die Sprache der natürlichen Zahlen $L_N = \{0, S, +, \cdot, <\}$

· die Mengenlehre-Sprache $L_{Me} = \{\in\}$

Definition 1.3 Sei L eine Sprache. Eine L-*Struktur* ist ein Paar
$\mathfrak{A} = (A,\, (Z^{\mathfrak{A}})_{Z \in L})$, wobei

A eine nicht-leere Menge ist,
$Z^{\mathfrak{A}} \in A$, wenn Z eine Konstante ist,
$Z^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$, wenn Z ein n-stelliges Funktionszeichen ist, und
$Z^{\mathfrak{A}} \subset A^n$, wenn Z ein n-stelliges Relationszeichen ist.

$Z^{\mathfrak{A}}$ ist also eine Interpretation der Zeichen von L in A.

Definition 1.4 Zwei L-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen *isomorph*, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, wenn es einen *Isomorphismus* $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ gibt, eine Bijektion $F : A \to B$, die mit den Interpretationen der Zeichen aus L kommutiert:

· $F(Z^{\mathfrak{A}}) = Z^{\mathfrak{B}}$ (Z eine Konstante aus L)

· $F(Z^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)) = Z^{\mathfrak{B}}(F(a_1, ..., a_n))$ (Z ein n-stelliges Funktionszeichen aus $L, a_1, ..., a_n \in A$)

· $Z^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow Z^{\mathfrak{B}}(F(a_1, ..., F(a_n))$ (Z ein n-stelliges Relationszeichen aus $L, a_1, ..., a_n \in A$)

Definition 1.5 Ein $L - Term$ ist eine Zeichenfolge, die nach den folgenden Regeln gebildet ist:

T1 Jede Variable ist ein L-Term.
T2 Jede Konstante aus L ist ein L-Term.
T3 Wenn f ein n-stelliges Funktionszeichen aus L ist und wenn $t_1, ..., t_n$ L-Terme sind, dann ist auch $ft_1...t_n$ ein L-Term.

Beispiel 1.5.1

$(x + y) \cdot (z + w) = \cdot + xy + zw$

Lemma 1.6 (Eindeutige Lesbarkeit von Termen)
Für jeden L-Term t tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein:

1. t ist eine Variable,
2. t ist eine Konstante,
3. $t = ft_1...t_n$, wobei f ein n-stelliges Funktionszeichen und $t_1, ..., t_n$ L-Terme sind.

Im letzten Fall sind f und $t_1, ..., t_n$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Es muss einer der drei Fälle eintreten. Nun ist die Eindeutigkeit der t_i zu zeigen. Wenn $t = es_1...s_m$ für ein m-stelliges Funktionszeichen e und Terme s_i, dann gilt $e = f$ und $m = n$. Dass $s_i = t_i$, folgt aus dem nächsten Hilfssatz. □

Hilfssatz 1.6.1 *Kein L-Term ist echtes Anfangsstück eines anderen L-Terms*

Beweis: Sei s Anfangsstück von t. Wir zeigen $s = t$ durch Induktion über den Aufbau von t. Wenn t eine Variable oder eine Konstante ist, ist die Behauptung klar. Sonst ist $s = fs_1...s_n$ und $t = ft_1...t_n$ für ein n-stelliges Funktionszeichen f. Wenn $s \neq t$, dann gibt es einen kleinsten Index i mit $s_i \neq t_i$. Dann ist s_i echtes Anfangsstück von t_i oder t_i echtes Anfangsstück von s_i, was nach der Induktionsvoraussetzung nicht möglich ist. □

Definition 1.7 Die folgenden Ausdrücke sind L-Formeln:

F1 $t_1 \doteq t_2$, wenn t_1, t_2 L-Terme sind,
F2 $Rt_1, ..., t_n$, wenn R ein n-stelliges Relationszeichen aus L und $t_1, ..., t_n$ L-Terme sind,
F3 $\neg\,\psi$, wenn ψ eine L-Formel ist,
F4 $(\psi_1 \wedge \psi_2)$, wenn ψ_1 und ψ_2 L-Formeln sind,
F5 $\exists\, x\ \psi$, wenn ψ eine L-Formel und x eine Variable ist.

Jede L-Formel ensteht auf diese Weise.

Beispiel 1.7.1
Körperaxiome in L_G
1. $\forall\, x, y\ \ x + y \doteq y + x$
2. $\forall\, x\ \ x + 0 \doteq x$
3. $\forall\, x\ \ x + (-x) \doteq 0$
4. $\forall\, x, y, z\ \ (x + y) + z \doteq x + (y + z)$

1. Axiom ausgeschrieben:
$\neg\,\exists\, v_0 \neg\,\neg\,\exists v_1 \,\neg + v_0 v_1 \doteq + v_1 v_0$

Lemma 1.8 (Eindeutige Lesbarkeit von Formeln)
Für jede L-Formel φ tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

1. $\varphi = t_1 = t_2$ für L-Terme t_1, t_2
2. $\varphi = Rt_1 ... t_n$ für ein n-stelliges Relationszeichen R aus L und L-Terme $t_1, ..., t_n$
3. $\varphi = \neg\, \psi$ für eine L-Formel ψ
4. $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ für L-Formeln ψ_1 und ψ_2
5. $\varphi = \exists\, x\ \psi$ für eine L-Formel ψ und eine Variable x

In jedem der Fälle sind die Terme t_i, das Relationszeichen R, die Formeln ψ, ψ_1, ψ_2 und die Variable x jeweils eindeutig bestimmt.

Beweis: (Analog zu Beweis von Lemma 1.6)
Es muss einer der fünf Fälle eintreten. Als nächstes muss noch in jedem Einzelfall die Eindeutigkeit der Zerlegung gezeigt werden. Aus dem nächsten Hilfssatz folgt dann $\psi_1 = \psi_1'$ und $\psi_2 = \psi_2'$. □

Hilfssatz 1.8.1 *Keine L-Formel ist echtes Anfangsstück einer anderen L-Formel*

Beweis: (Analog zu Beweis von Hilfssatz 1.6.1)
Seien φ und φ' L-Formeln.
Behauptung: Sei φ ein echtes Anfangsstück von φ'.
Wir zeigen durch Induktion über den Aufbau von φ', dass dies nicht möglich ist. Es ist klar, dass für φ und φ' derselbe Fall auftritt.
Man geht alle fünf Fälle durch und zeigt einzeln, dass sie der Induktionsvoraussetzung widersprechen. □

Semantik in der Prädikatenlogik

Fakultät für Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum

Ausarbeitung des Proseminars

vorgelegt von

Niklas Schubert
geboren am 05.02.1999 in Oberhausen
Matrikelnummer: 108017202333

eingereicht am 17. Dezember 2018

Dozent: Prof. Dr. C. Thäle

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In diesem Kapitel, der Semantik, wird den allgemeinen Strukturen und Formeln aus dem 1.Kapitel eine Bedeutung zugeteilt. Die Semantik kann auch als ein Regelwerk oder starres Konzept angesehen werden, das Formeln eine Bedeutung verleiht. Man interpretiert einzelne Bestandteile einer Formel und bei der korrekten Wahl dieser Interpretationen ist man berechtigt von wahren und falschen Aussagen zu sprechen. Der Fokus dieses Kapitels liegt größtenteils auf den rekursiven Definitionen, welche sich zunächst auf Terme beziehen und dann auf Formeln ausgeweitet werden. In diesem Kapitel gilt die Konvention, dass wenn über Terme oder Formeln gesprochen wird, diese mit einer Sprache L versehen sind und aus einer L-Struktur $\mathfrak{A}$ kommen. Die Beweise geschehen, wie auch schon im 1. Kapitel, durch eine Induktion über den Aufbau von Formeln oder Termen.

2 Belegungen

Um Aussagen zu interpretieren, nutzt man in der Prädikatenlogik die sogenannten Belegungen, welche Variablen in einer Struktur Werte zuordnen. Diese sind Abbildungen von der Menge der Variablen in das Universum der Struktur. Um diese Abbildungen richtig auf Termen definieren zu können, benötigt man eine rekursive Definition, welche die Fälle durchgeht, dass t eine Konstante, Variable oder ein Funktionszeichen ist.

Definition 1. *Seien t Terme und ß Belegungen, dann gilt für $t^{\mathfrak{A}}[ß]$ rekursiv:*

$$\begin{aligned} c^{\mathfrak{A}}[ß] &= c^{\mathfrak{A}},\ \textit{falls } t = c \\ v_i^{\mathfrak{A}}[ß] &= ß(v_i),\ \textit{falls } t = v_i \\ ft_1 \dots t_n^{\mathfrak{A}}[ß] &= f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[ß], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[ß]),\ \textit{falls } t = ft_1 \dots t_n \end{aligned}$$

Beispiele 1. *1.)Sei $\mathfrak{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen und $ß(v_i) = 2i$, also die Belegung, welche der i-ten Variabel eine gerade Zahl zuordnet. t sei der Term für den gilt: $t = + \cdot v_0 v_1\ v_2$ und somit ist $t^{\mathfrak{Q}}[ß] = (0 \cdot 2) + 4 = 4$.*

2.)Betrachtet man wieder die rationalen Zahlen und diesmal $ß(v_i) = i + 4$. Der Term t ist gegeben als: $t = \cdot + v_0 v_1\ + v_1 v_2$ und somit $t^{\mathfrak{Q}}[ß] = (4 + 5) \cdot (5 + 6) = 99$.

Lemma 1. *Sei t ein Term und $ß, \gamma$ Belegungen, welche auf den Variablen in t übereinstimmen, dann gilt:*

$$t^{\mathfrak{A}}[ß] = t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$$

Beweis. Sei t ein Term und $ß, \gamma$ Belegungen auf $\mathfrak{A}$, welche auf den Variablen die in t vorkommen übereinstimmen. Nach Lemma (Eindeutigkeit Lesbarkeit von Termen (Kapitel 1)) gilt: Ein Term t ist entweder eine Konstante, Variable oder ein n-stelliges Funktionszeichen. Der Induktionsanfang ist der Fall, t ist eine Konstante oder Variable.

i) t ist eine Konstante, dann gilt: $t^{\mathfrak{A}}[\gamma] = c^{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A} \Rightarrow t^{\mathfrak{A}}[ß] = c^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$ (Umformung gilt, da nach der Definition eine Konstante nicht von einer Belegung betroffen ist).

ii) t ist eine Variable, dann gilt: $t^{\mathfrak{A}} = v_i^{\mathfrak{A}}$. Nach Voraussetzung gilt: $ß(v_i) = \gamma(v_i)$ für alle v_i von t. $\Rightarrow t^{\mathfrak{A}}[ß] = v_i^{\mathfrak{A}}[ß] = ß(v_i) = \gamma(v_i) = v_i^{\mathfrak{A}}[\gamma] = t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$.

iii) t ist ein n-stelliges Funktionszeichen. Es gilt die $t_1, \ldots, t_n$ sind somit wieder Konstanten, Variablen und Funktionszeichen. Aber nach der Induktionsvoraussetzung sind die $t_i[ß] = t_i[\gamma]$ für alle t_i mit $i = 1, \ldots, n$. Also ist der Induktionsschritt: $t^{\mathfrak{A}}[ß] = ft_1, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[ß] = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[ß], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[ß]) = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\gamma]) = ft_1, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\gamma] = t^{\mathfrak{A}}[\gamma]$ □

Notation 1. *Wenn man Terme in der Form $t(x_1, \ldots, x_n)$ schreibt meint man, dass:*
i) die x_i paarweise verschiedene Variablen sind.
ii) in t nur Variablen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ vorkommen.

Durch diese Notation kann man folgern, dass wenn $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ sind, gibt es eine wohldefinierte Belegung $ß(x_i) = a_i$. Dies gilt nach dem Lemma 1 und der Definition von $t^{\mathfrak{A}}[ß]$ für eine Belegung ß auf $\mathfrak{A}$.

3 Semantik

Die Semantik gibt an, wann eine Formel in einer Struktur auf eine Belegung zutrifft. Zunächst gibt man eine rekursive Definition an, denn es muss für jeden Fall, den eine Formel annehmen kann, definiert werden wann dieser dann in der Struktur gilt. Diese rekursive Definition ist somit sinnvoll, durch die Eindeutige Lesbarkeit aus Kapitel 1. Danach will man die Eigenschaften der Semantik auch noch auf die Belegungen beziehen, indem man sagt, wann eine L-Formel mit unterschiedlicher Belegung in der Struktur gilt. Dies hängt damit zusammen, wann eine Variabel frei in einer Formel vorkommt. Somit kann der Koinzidenzsatz eingeführt werden, welcher dies entscheidet. Zuletzt führt man noch den Begriff einer Aussage ein und wann diese äquivalent ist.

Definition 2. *Sei ß eine Belegung auf $\mathfrak{A}$ und φ eine Formel. Dann bedeutet die Relation $\models$ für den Ausdruck: $\mathfrak{A} \models \varphi[ß] \iff$ "Die Formel φ trifft in $\mathfrak{A}$ auf ß zu". Für die fünf Fälle, die eine L-Formel annehmen kann, gilt dann:*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models t_1 \doteq t_2[ß] &\iff t_1^{\mathfrak{A}}[ß] = t_2^{\mathfrak{A}}[ß] \\
\mathfrak{A} \models Rt_1 \ldots t_n[ß] &\iff R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[ß], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[ß]) \\
\mathfrak{A} \models \neg\psi[ß] &\iff \mathfrak{A} \not\models \psi[ß] \\
\mathfrak{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[ß] &\iff \mathfrak{A} \models \psi_1[ß] \textit{ und } \mathfrak{A} \models \psi_2[ß] \\
\mathfrak{A} \models \exists x\psi[ß] &\iff \textit{es gibt ein } a \in \mathfrak{A} \textit{ mit } \mathfrak{A} \models \psi[ß\frac{a}{x}]
\end{aligned}$$

Dabei gilt: $ß\frac{a}{x}(y) = \begin{cases} \beta(y) & \textit{wenn } y \neq x \\ a & \textit{wenn } y = x \end{cases}$

Beispiele 2. *1.)Ein Beispiel für die vorherige Definition, wäre wenn φ eine Negation darstellt in dem Sinne, dass:* $\mathfrak{A} \models \varphi[\text{ß}] \iff \mathfrak{A} \models \neg\psi[\text{ß}] \iff \mathfrak{A} \models \neg(\exists x : x \in \mathbb{N} \ \wedge \ x \neq 1) \iff \mathfrak{A} \models \forall x : x \notin \mathbb{N} \ \vee \ x = 1 \iff \mathfrak{A} \not\models \exists x : x \in \mathbb{N} \ \wedge \ x \neq 1 \iff \mathfrak{A} \not\models \psi[\text{ß}]$.

2.)Um den letzten Teil der Semantik besser nachzuvollziehen, betrachtet man dafür ein Beispiel im Körper der rationalen Zahlen: Sei φ ein Quantor, sodass gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi[\text{ß}] \iff \mathfrak{A} \models \exists x\psi[\text{ß}]$. *Dabei ist ψ die Gleichheit zweier Terme t_1, t_2 der Form $t_1 = + \cdot v_0 v_1\ x$ und $t_2 = v_8$ und für die Belegung gilt: $\text{ß}(v_i) = i + 2$. Dann gilt für* $\mathfrak{A} \models t_1 = t_2[\text{ß}] \iff t_1^{\mathfrak{A}}[\text{ß}] = t_2^{\mathfrak{A}}[\text{ß}] \iff (2 \cdot 3) + \text{ß}(x) = 10$. *Für die Belegung ß gibt es also ein $a = 4 = \text{ß}(x) \in \mathfrak{A}$ und somit ein $x = y = v_2$ für das die Aussage ψ in $\mathfrak{A}$ gilt.*

3.)Die Semantik kann auch auf andere Ausdrücke sofort übertragen werden. Zum Beispiel auf die Implikation. Seien ψ_1 und ψ_2 Formeln, dann gilt: $\mathfrak{A} \models (\psi_1 \Rightarrow \psi_2) \iff \neg(\mathfrak{A} \models \psi_1$ *und* $\mathfrak{A} \not\models \psi_2)$.

Ob φ in $\mathfrak{A}$ auf ß zutrifft, hängt nur von den freien Variablen in φ ab. Deshalb führt man die Definition einer freien Variabel ein und danach den Koinzidenzsatz, welcher diese anwendet. Die Definition wird wieder rekursiv aufgebaut, wie die Definition der Semantik.

Definition 3. *Sei φ eine Formel und x eine Variable in φ. Dann heißt x frei in φ, wenn Sie an einer Stelle vorkommt, die nicht im Wirkungsbereich eines Quantors $\exists x$ liegt. Man betrachte wieder rekursiv 5 Fälle:*

$$\begin{aligned} x \textit{ frei in } t_1 \doteq t_2 &\iff x \textit{ kommt in } t_1 \textit{ oder in } t_2 \textit{ vor.} \\ x \textit{ frei in } Rt_1 \dots t_n &\iff x \textit{ kommt in einem der } t_i \textit{ vor.} \\ x \textit{ frei in } \neg\psi &\iff x \textit{ frei in } \psi \\ x \textit{ frei in } (\psi_1 \wedge \psi_2) &\iff x \textit{ frei in } \psi_1 \textit{ oder } x \textit{ frei in } \psi_2 \\ x \textit{ frei in } \exists y\psi &\iff x \neq y \textit{ und } x \textit{ frei in } \psi \end{aligned}$$

Falls x nicht frei in der Formel ist, sondern an einem Quantor liegt, nennt man x gebunden.

Bemerkungen 1. *i) Eine Variable in einer Formel, kann gleichzeitig gebunden und frei vorkommen (siehe das nächste Beispiel).*

ii) In Termen sind Variablen nach Definition schon frei, da keine Quantoren in Termen vorkommen.

Beispiele 3. *1.) Sei φ von der Form: $\exists x : x = v_1$ mit v_1 ist eine Variable. Dann gilt x ist gebunden in φ.*

2.)Sei φ von der Form: $f(x, y) = c$ mit x eine Variable und c eine Konstante. Dann gilt x ist frei in φ.

3.)Sei φ von der Form: $(\exists x : x = v_1) \wedge (f(x, y) = c)$ mit v_1, y Variablen und c eine Konstante. Dann gilt x ist frei und gebunden in φ.

Satz (Koinzidenzsatz)**.** *Sei φ eine Formel und ß, γ Belegungen auf der Struktur. Dann gilt, wenn ß und γ an allen Variablen, die frei in φ vorkommen übereinstimmen, ist:*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[ß] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$$

Beweis. Sei φ eine Formel und ß, γ Belegungen auf $\mathfrak{A}$, sodass diese an allen Variablen, welche frei in φ vorkommen, übereinstimmen. Nach Lemma 1.2 aus Kapitel 1 kann φ entweder eine Primformel sein, also betrachtet φ die Gleichheit zweier Terme oder ist eine Relation, oder φ ist eine Negation, Konjunktion oder ein Quantor. Das φ eine Primformel ist, ist in diesem Fall der Induktionsanfang für die anderen drei Fälle.

i) φ betrachtet Gleichheit folgt sofort aus dem Lemma, was vorhin bewiesen wurde. Denn es gilt, $t_i^{\mathfrak{A}}[ß] = t_i^{\mathfrak{A}}[\gamma]$ für alle Variablen in t_i mit i=1,2. Seien t_1 und t_2 Terme, dann gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi[ß] \iff \mathfrak{A} \models t_1 = t_2[ß] \iff t_1^{\mathfrak{A}}[ß] = t_2^{\mathfrak{A}}[ß] \iff t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma] = t_2^{\mathfrak{A}}[\gamma] \iff \mathfrak{A} \models t_1 = t_2[\gamma] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$.

ii) φ ist eine Relation, folgt auch aus dem Lemma. Somit gilt die selbe Voraussetzung wie in i) für $i = 1, \ldots, n$. Daher folgt: $\mathfrak{A} \models \varphi[ß] \iff \mathfrak{A} \models Rt_1 \ldots t_n[ß] \iff R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[ß], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[ß]) \iff R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[\gamma], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\gamma]) \iff \mathfrak{A} \models Rt_1, \ldots, t_n[\gamma] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$.

iii) φ ist eine Negation, sodass $\varphi = \neg\psi$, wobei ψ wieder eine Formel ist. Nach Induktionsvoraussetzung gilt, $\mathfrak{A} \models \psi[ß] \iff \mathfrak{A} \models \psi[\gamma]$. Daraus folgt der Induktionsschritt: $\mathfrak{A} \models \varphi[ß] \iff \mathfrak{A} \models \neg\psi[ß] \iff \mathfrak{A} \not\models \psi[ß] \iff \mathfrak{A} \not\models \psi[\gamma] \iff \mathfrak{A} \models \neg\psi[\gamma] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$.

iv) φ ist eine Konjunktion, sodass $\varphi = \psi_1 \land \psi_2$, wobei ψ_1 und ψ_2 wieder Formeln sind. Nach Induktionsvoraussetzung gilt: $\mathfrak{A} \models \psi_1[ß] \iff \mathfrak{A} \models \psi_1[\gamma]$ und $\mathfrak{A} \models \psi_2[ß] \iff \mathfrak{A} \models \psi_2[\gamma]$. Somit gilt für den Induktionsschritt: $\mathfrak{A} \models \varphi[ß] \iff \mathfrak{A} \models (\psi_1 \land \psi_2)[ß] \iff \mathfrak{A} \models \psi_1[ß]$ und $\mathfrak{A} \models \psi_2[ß] \iff \mathfrak{A} \models \psi_1[\gamma]$ und $\mathfrak{A} \models \psi_2[\gamma] \iff \mathfrak{A} \models (\psi_1 \land \psi_2)[\gamma] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$.

v) φ ist ein Quantor, sodass $\varphi = \exists x\psi$, wobei ψ wieder eine Formel ist. Nach Induktionsvoraussetzung gilt: $\mathfrak{A} \models \psi[ß] \iff \mathfrak{A} \models \psi[\gamma]$. Die einzige Betrachtung die für den Fall relevant ist, ist die Variable x in ψ. Wenn x in ψ frei ist, gilt $ß(x) = \gamma(x)$ nach Induktionsvoraussetzung. Ist die Variable nicht frei so, wird diese auch nicht belegt und ist unabhängig von der Belegung. Somit gilt der Induktionsschritt: $\mathfrak{A} \models \varphi[ß] \iff \mathfrak{A} \models \exists x\psi[ß] \iff$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \psi[ß\frac{a}{x}] \iff$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \psi[\gamma\frac{a}{x}] \iff \mathfrak{A} \models \exists x\psi[\gamma] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\gamma]$. □

Notation 2. *Wenn man Formeln in der Form $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ schreibt, meint man, dass:*
i)die x_i paarweise verschiedene Variablen sind.
ii)in φ nur Variablen $\{x_1, \ldots, x_n\}$ vorkommen.

Durch diese Notation, kann man folgern: Wenn $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ sind, ist $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ durch $\mathfrak{A} \models \varphi[ß]$ für eine Belegung ß mit $ß(x_i) = a_i$ wohldefiniert.

Definition 4. *Eine Aussage φ ist eine Formel ohne freie Variable. Somit gilt, dass eine Aussage genau dann in $\mathfrak{A}$ gilt, wenn $\mathfrak{A} \models \varphi[ß]$ für alle $[ß]$ in $\mathfrak{A}$. Zwei L-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ heißen elementar äquivalent oder man schreibt auch $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ wenn in ihnen die gleichen Aussagen gelten.*

4 Substitution

Im letzten Abschnitt geht es um die Substitution in der Prädikatenlogik. Das bedeutet also, die Ersetzung freier Variablen in einer Formel oder eines Terms durch einen Term. Hier betrachtet man, wie eine Substitution sich bei einer Formel verhält und wie sich die Substitution mit der Belegung einer Formel oder eines Terms verhält. Das letztere führt zu einem wichtigen Lemma, nämlich dem Substitutionslemma.

Notation 3. *Sei x eine Variabel und s ein Term. Dann bedeutet:*
i)$t\frac{s}{x}$ ist der Term, welcher entsteht, indem man alle x durch s ersetzt.
ii)$\varphi\frac{s}{x}$ ist die Formel, welche entsteht, indem man alle freien x in φ durch s ersetzt.

Definition 5. *Die Substition, wird über Rekursion definiert, denn wenn man eine Formel oder einen Term substituiert, entsteht wieder eine Formel oder ein Term. Daher gilt:*

$$\begin{aligned}(t_1 \doteq t_2)\frac{s}{x} &= t_1\frac{s}{x} \doteq t_2\frac{s}{x}\\ (Rt_1 \dots t_n)\frac{s}{x} &= Rt_1\frac{s}{x} \dots t_n\frac{s}{x}\\ (\neg\psi)\frac{s}{x} &= \neg(\psi\frac{s}{x})\\ (\psi_1 \wedge \psi_2)\frac{s}{x} &= (\psi_1\frac{s}{x} \wedge \psi_2\frac{s}{x})\\ (\exists y\psi)\frac{s}{x} &= \exists y(\psi\frac{s}{x}),\ \textit{wenn } x \neq y\\ (\exists y\psi)\frac{s}{x} &= \exists y\psi,\ \textit{wenn } x = y\end{aligned}$$

Beispiele 4. *1.)Es sei $\varphi = \exists v_1 : R(v_1, v_2, v_3)$ eine Formel mit einer 3-stelligen Relation R und Variablen v_1, v_2, v_3. Betrachte nun die Substitution: $\varphi\frac{f(v_3,v_4)}{v_2} = \exists v_1 : R(v_1, f(v_3, v_4), v_3)$.*

2.)Es sei φ wie in 1.). Betrachte nun die Substitution: $\varphi\frac{f(v_1,v_3)}{v_2} = \exists v_1 : R(v_1, f(v_1, v_3), v_3)$.

Definition 6. *Eine Variable x heißt frei für einen Term s in einer Formel φ, falls in $\varphi\frac{s}{x}$ keine Variable in den eingesetzten Term s gebunden ist.*
Rekursiv definiert ist x frei für s in φ, wenn x nicht frei in φ ist oder wenn x frei in φ

ist gilt einer der fünf Fälle:

$$\varphi = t_1 \doteq t_2,$$
$$\varphi = Rt_1 \ldots t_n,$$
$$\varphi = \neg\psi \text{ und } x \text{ frei für } s \text{ in } \psi,$$
$$\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2) \text{ und } x \text{ frei für } s \text{ in } \psi_1 \text{ und } \psi_2,$$
$$\varphi = \exists y \psi, \; x \text{ frei für } s \text{ in } \psi \text{ und } y \text{ kommt nicht in } s \text{ vor.}$$

Beispiele 5. *Betrachte die 2 Substitutionen aus Beispiele 5:*
1.)Für den ersten Fall gilt, dass v_2 frei für $f(v_3, v_4)$ in φ ist.

2.)Beim zweiten Fall ist v_2 jedoch nicht frei für $f(v_1, v_3)$ in φ, denn die Variable v_1 ist in φ nach der Substitution gebunden.

Lemma 2 (Substitutionslemma)**.** *Sei x eine Variable, s ein Term und ß eine Belegung mit Werten in der Struktur $\mathfrak{A}$, dann gilt:*

1.Für jeden Term t ist: $(t\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[ß] = t^{\mathfrak{A}}[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]$.

2.Für jede Formel φ ist: $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{s}{x}[ß] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]$,
falls x frei für s in φ.

Beweis. 1. Betrachte wieder, nach Lemma aus Kapitel 1, 3 Fälle, wobei die ersten beiden der Induktionsanfang sind.

i) Falls t eine Konstante ist, wird nichts substituiert, weil man nur über Variablen substituiert. Auch bezüglich der Belegung passiert nichts, da eine Konstante nicht von einer Belegung betroffen ist und somit steht auf beiden Seiten $t^{\mathfrak{A}}$. Also gilt dann: $(t\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[ß] = t^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{A}}[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]$.

ii) Falls t eine Variable ist können zwei Fälle auftreten.

t=x, dann sind beide Seiten der Behauptungen, nach der Definition der Substitution, gleich $s^{\mathfrak{A}}[ß]$. Denn es gilt: $(t\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[ß] = (x\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[ß] = (s)^{\mathfrak{A}}[ß] = x^{\mathfrak{A}}[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}] = t^{\mathfrak{A}}[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]$.

Falls $t \neq x$, wird nichts substituiert, daher sind beide Seiten gleich $ß(t)$. Denn es gilt: $(t\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[ß] = t^{\mathfrak{A}}[ß] = ß(t) = t^{\mathfrak{A}}[ß] = t^{\mathfrak{A}}[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]$.

iii) t ist ein zusammengesetzter Term, dass heißt $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ für $t_1, \ldots, t_n$ Terme. Aber nach der Induktionsvoraussetzung gilt: $(t_i\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[ß] = t_i^{\mathfrak{A}}[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Somit folgt der Induktionsschritt: $(t\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[ß] = f^{\mathfrak{A}}((t_1\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[ß], \ldots, (t_n\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[ß]) = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]) = t^{\mathfrak{A}}[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]$.

2. Für die Variable x in der Formel können zwei Fälle eintreten. Die Variable x ist nicht frei in φ, dann folgt die Behauptung aus dem Koinzidenzsatz. Denn dann wird nichts substituiert und die Belegungen stimmen auf allen freien Variablen in φ überein. Also ist $\varphi\frac{s}{x} = \varphi$ und es gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{s}{x}[ß] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[ß] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]$.

Der andere Fall, also wenn x frei in φ ist, wird wieder über den Aufbau von φ per Induktion bewiesen. Wieder sind die Primformeln der Induktionsanfang.

i) Ist φ die Gleichheit zweier Terme, ist der Beweis der selbe wie im 1. Teil.

ii) Sei φ eine Relation, also gilt $\varphi = Rt_1, \dots, t_n$ mit $t_1, \dots, t_n$ Terme in $\mathfrak{A}$. Dann gilt auch aus dem 1. Teil für die t_i mit $i = 1, \dots, n$: $(t_i\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[ß] = t_i^{\mathfrak{A}}[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]$. Somit folgt: $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{s}{x}[ß] \iff \mathfrak{A} \models (Rt_1 \dots t_n)\frac{s}{x}[ß] \iff R^{\mathfrak{A}}((t_1\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[ß], \dots, (t_n\frac{s}{x})^{\mathfrak{A}}[ß]) \iff R^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}], \dots, t_n^{\mathfrak{A}}[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]) \iff \mathfrak{A} \models (Rt_1 \dots t_n)[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]$.

iii) Sei φ eine Negation, also gilt $\varphi = \neg\psi$ für eine Formel ψ in $\mathfrak{A}$. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung: $\mathfrak{A} \models \psi\frac{s}{x}[ß] \iff \mathfrak{A} \models \psi[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]$. Daher gilt der Induktionsschritt: $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{s}{x}[ß] \iff \mathfrak{A} \models (\neg\psi)\frac{s}{x}[ß] \iff \mathfrak{A} \models \neg(\psi\frac{s}{x})[ß] \iff \mathfrak{A} \not\models \psi\frac{s}{x}[ß] \iff \mathfrak{A} \not\models \psi[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}] \iff \mathfrak{A} \models \neg(\psi)[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}] \iff \mathfrak{A} \models (\neg\psi)[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]$.

iv) Sei φ eine Konjunktion, das heißt $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ mit ψ_1 und ψ_2 Formeln in $\mathfrak{A}$. Es gilt die Induktionsvoraussetzung: $\mathfrak{A} \models \psi_i\frac{s}{x}[ß] \iff \mathfrak{A} \models \psi_i[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]$ für i=1,2. Daher gilt der Induktionsschritt: $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{s}{x}[ß] \iff \mathfrak{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)\frac{s}{x}[ß] \iff \mathfrak{A} \models (\psi_1\frac{s}{x} \wedge \psi_2\frac{s}{x})[ß] \iff \mathfrak{A} \models \psi_1\frac{s}{x}[ß]$ und $\mathfrak{A} \models \psi_2\frac{s}{x}[ß] \iff \mathfrak{A} \models \psi_1[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]$ und $\mathfrak{A} \models \psi_2[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}] \iff \mathfrak{A} \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]$

v) Wenn φ ein Quantor ist, also $\varphi = \exists y\psi$ für eine Formel ψ aus $\mathfrak{A}$, dann gilt nach Voraussetzung $x \neq y$. Zusätzlich gilt, dass y nicht in s vorkommt, da x frei für s in φ ist. Es gilt die Induktionsvoraussetzung:$\mathfrak{A} \models \psi\frac{s}{x}[ß] \iff \mathfrak{A} \models \psi[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]$. Für ein $b := s^{\mathfrak{A}}[ß]$, gilt somit der Induktionsschritt: $\mathfrak{A} \models \varphi\frac{s}{x}[ß] \iff \mathfrak{A} \models (\exists y\psi)\frac{s}{x}[ß] \iff \mathfrak{A} \models (\exists y\psi\frac{s}{x})[ß] \iff$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \psi\frac{s}{x}[ß\frac{a}{y}] \iff$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \psi[ß\frac{a}{y}\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß\frac{a}{y}]}{x}] \iff$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \psi[ß\frac{a}{y}\frac{b}{x}] \iff$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \psi[ß\frac{b}{x}\frac{a}{y}] \iff \mathfrak{A} \models (\exists y\psi)[ß\frac{b}{x}] \iff \mathfrak{A} \models (\exists y\psi)[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[ß\frac{s^{\mathfrak{A}}[ß]}{x}]$. □

Bemerkungen 2. *In dem Beweis sieht man, dass es bei der Substitution nicht auf die Reihenfolge ankommt, nach der substituiert wird, falls die Variablen, nach denen substituiert wird, nicht gleich sind.*

Notation 4. *Sei $t = t(x_1, \dots, x_n), \varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ und $s = s(x_1, \dots, x_n)$. Dann kann man das Substitutionslemma schreiben als:*
i)$t(s, x_2, \dots, x_n)^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n] = t^{\mathfrak{A}}[s^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n], a_2, \dots, a_n]$.
ii)$\mathfrak{A} \models \varphi(s, x_2, \dots, x_n)[a_1, \dots, a_n] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[s^{\mathfrak{A}}[a_1, \dots, a_n], a_2, \dots, a_n]$.

5 Literaturverzeichnis

[1]*Mathematische Logik* von Martin Ziegler (2. Auflage, Birkhäuser 2017).
[2]*Grenzen der Mathematik* von Dirk Hoffmann (3. Auflage, Springer 2018)

6 Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel: „*Proseminar Ausarbeitung*“ selbstständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe angefertigt habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Ort, Datum Unterschrift

Allgemeingültige Formeln

Thomas Tsianakas und Sefer Oflazoglu

04.01.2019

Definition

Eine Sprache L ist eine Menge von Konstanten, Funktionszeichen und Relationszeichen.

Definition

Eine Sprache L ist eine Menge von Konstanten, Funktionszeichen und Relationszeichen.

Definition

Jede Variable und Konstante ist ein L-Term. Sei f ein n-stelliges Funktionszeichen und t_1 ,...,t_n L-Terme, dann sind auch f $t_1 ... t_n$ L-Terme

Definition

Eine Sprache L ist eine Menge von Konstanten, Funktionszeichen und Relationszeichen.

Definition

Jede Variable und Konstante ist ein L-Term. Sei f ein n-stelliges Funktionszeichen und t_1 ,...,t_n L-Terme, dann sind auch f $t_1 \ldots t_n$ L-Terme

Definition

Eine L-Formel entsteht, wenn $n \geq 2$ L-Terme in Relation stehen. Die Negation, Konjunktion und Disjunktion von L-Formeln sind L-Formeln.

Definition

Sei φ eine Aussage. $\mathrm{A_1}$,...,$\mathrm{A_n}$ bezeichnen die in φ vorkommenden Variablen. Dann heißt jede Abbildung $\beta : \{A_1, ..., A_n\} \longrightarrow$ A eine Belegung von φ.
Ein Spezialfall ist die Interpretation $I : M \longrightarrow \{w, f\}$

Definition

Sei φ eine Aussage. A_1,...,A_n bezeichnen die in φ vorkommenden Variablen. Dann heißt jede Abbildung $\beta : \{A_1, ..., A_n\} \longrightarrow$ A eine Belegung von φ.
Ein Spezialfall ist die Interpretation $I : M \longrightarrow \{w, f\}$

Definition

Eine L-Struktur ist ein Paar $\mathcal{U}$=(A, $(Z^{\mathcal{U}})_{Z \in L}$) bestehend aus einer Grundmenge und einer Menge aller Konstanten, Funktionszeichen und Relationszeichen.

Definition

Sei φ eine Aussage. $A_1, \ldots, A_n$ bezeichnen die in φ vorkommenden Variablen. Dann heißt jede Abbildung $\beta : \{A_1, \ldots, A_n\} \longrightarrow$ A eine Belegung von φ.
Ein Spezialfall ist die Interpretation $I : M \longrightarrow \{w, f\}$

Definition

Eine L-Struktur ist ein Paar $\mathcal{U}$=(A, $(Z^{\mathcal{U}})_{Z \in L}$) bestehend aus einer Grundmenge und einer Menge aller Konstanten, Funktionszeichen und Relationszeichen.

Definition

Sei φ eine L-Formel und I eine Interpretation. Eine L-Formel ist modellierbar, falls sie in ihrer Interpretation wahr ist.

Definition

Eine L-Formel φ ist allgemeingültig, wenn sie für alle Belegungen modellierbar ist. $\varphi(x_1, ..., x_n)$ ist allgemeingültig, wenn die Aussage $\forall x_1, ..., x_n\ \varphi(x_1, ..., x_n)$ allgemeingültig ist. Wir schreiben hierfür $\models \varphi$

Beispiel: In jeder Menschenmenge gibt es einen, wenn der einen Hut trägt, dann auch alle anderen.

$$\underbrace{\exists x(H(x)}_{=:A} \rightarrow \underbrace{\forall y H(y))}_{=:B}$$

Definition

Eine L-Formel φ ist allgemeingültig, wenn sie für alle Belegungen modellierbar ist. $\varphi(x_1, ..., x_n)$ ist allgemeingültig, wenn die Aussage $\forall x_1, ..., x_n\ \varphi(x_1, ..., x_n)$ allgemeingültig ist. Wir schreiben hierfür $\models \varphi$

Beispiel: In jeder Menschenmenge gibt es einen, wenn der einen Hut trägt, dann auch alle anderen.

$$\underbrace{\exists x(H(x)}_{=:A} \rightarrow \underbrace{\forall y H(y))}_{=:B}$$

A	B	A⟶B
w	w	
w	f	
f	w	
f	f	

Beispiel: In jeder Menschenmenge gibt es einen, wenn der einen Hut trägt, dann auch alle anderen.

$$\underbrace{\exists x(H(x)}_{=:A} \rightarrow \underbrace{\forall y H(y))}_{=:B}$$

1 $\forall y H(y)$ w $\rightarrow$ $H(x)$ w

$H(x) \rightarrow \forall y H(y)$ w

$\exists x(H(x) \rightarrow \forall y H(y))$ w

Beispiel: In jeder Menschenmenge gibt es einen, wenn der einen Hut trägt, dann auch alle anderen.

$$\underbrace{\exists x(H(x)}_{=:A} \rightarrow \underbrace{\forall y H(y))}_{=:B}$$

1 $\forall y H(y)$ w$\rightarrow$ $H(x)$ w

$H(x) \rightarrow \forall y H(y)$ w

$\exists x(H(x) \rightarrow \forall y H(y))$ w

2 $\forall y H(y)$ f$\rightarrow$ $\exists x \neg H(x)$

H(x) f $\rightarrow$ $(H(x) \rightarrow \forall y H(y))$ w

$\exists x(H(x) \rightarrow \forall y H(y))$ w

Beispiel: In jeder Menschenmenge gibt es einen, wenn der einen Hut trägt, dann auch alle anderen.

$$\underbrace{\exists x(H(x)}_{=:A} \rightarrow \underbrace{\forall y H(y))}_{=:B}$$

1 $\forall y H(y)$ w$\rightarrow$ $H(x)$ w

$H(x) \rightarrow \forall y H(y)$ w

$\exists x(H(x) \rightarrow \forall y H(y))$ w

2 $\forall y H(y)$ f$\rightarrow$ $\exists x \neg H(x)$

H(x) f $\rightarrow$ $(H(x) \rightarrow \forall y H(y))$ w

$\exists x(H(x) \rightarrow \forall y H(y))$ w

Wenn alle einen Hut tragen kann jeder der sein, der einen Hut tragen muss, damit auch alle anderen einen Hut tragen. Wenn es einen gibt, der keinen Hut trägt, so ist dieser die Person die einen Hut tragen muss, damit alle einen Hut tragen.

Satz (Erweiterung und Einschränkung)

Sei φ eine L-Formel und K eine Erweiterung von L. Dann ist φ als L-Formel genau dann allgemeingültig, wenn φ als K-Formel allgemeingültig ist.

Satz (Erweiterung und Einschränkung)

Sei φ eine L-Formel und K eine <u>Erweiterung</u> von L. Dann ist φ als L-Formel genau dann allgemeingültig, wenn φ als K-Formel allgemeingültig ist.

Beweis:(durch Kontraposition)

"$\Rightarrow$" Wenn φ in $\mathcal{U}$=(A,Z$^{\mathcal{U}}$)$_{Z\in\ K}$ falsch ist, dann auch eingeschränkt in $\mathcal{U} \upharpoonright$ L = (A,Z$^{\mathcal{U}}$)$_{Z\in\ L}$
"$\Leftarrow$" Wenn φ in $\mathcal{B}$ falsch ist, expandieren wir $\mathcal{B}$ zu einer K-Struktur $\mathcal{U}$, sodass $\mathcal{U} \upharpoonright$ L $= \mathcal{B}$. Dann ist φ auch in $\mathcal{U}$ falsch. $\square$

Satz (Erweiterung und Einschränkung)

Sei φ eine L-Formel und K eine <u>Erweiterung</u> von L. Dann ist φ als L-Formel genau dann allgemeingültig, wenn φ als K-Formel allgemeingültig ist.

Beweis:(durch Kontraposition)

"$\Rightarrow$" Wenn φ in $\mathcal{U}$=(A,$Z^{\mathcal{U}})_{Z\in K}$ falsch ist, dann auch eingeschränkt in $\mathcal{U} \upharpoonright$ L = (A,$Z^{\mathcal{U}})_{Z\in L}$
"$\Leftarrow$" Wenn φ in $\mathcal{B}$ falsch ist, expandieren wir $\mathcal{B}$ zu einer K-Struktur $\mathcal{U}$, sodass $\mathcal{U} \upharpoonright$ L $= \mathcal{B}$. Dann ist φ auch in $\mathcal{U}$ falsch. □

Beispiel

Sei $\varphi = (1 \leq 2)$, $\mathcal{U}_1 =$ (A,$Z^{\mathcal{U}})_{Z\in \mathbb{Z}}$ dann ist φ auch in $\mathcal{U}_2 =$ (A,$Z^{\mathcal{U}})_{Z\in \mathbb{N}}$ und $\mathcal{U}_3 =$ (A,$Z^{\mathcal{U}})_{Z\in \mathbb{R}}$ allgemeingültig.

Die Formeln $(\varphi \vee \neg\varphi)$ oder $(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$ sind immer wahr.

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \vee \neg\varphi$
w	f	w
f	w	w

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)$	$(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

Die Formeln $(\varphi \vee \neg\varphi)$ oder $(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) \to \psi$ sind immer wahr.

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \vee \neg\varphi$
w	f	w
f	w	w

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$\varphi \wedge (\varphi \to \psi)$	$(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) \to \psi$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

Die Abbildung $\mu : M \to \{W, F\}$ soll folgende Eigenschaften erhalten.

1. $\mu(\neg f) = \neg(\mu(f))$
2. $\mu(f \wedge g) = \mu(f) \wedge \mu(g)$

Dies definieren wir durch folgende Wahrheitstafeln.

$\wedge$	w	f
w	w	f
f	f	f

und

$\neg$	
w	f
f	w

Definition

Eine Tautologie ist eine allgemeingültige Aussage, bei der die Variablen durch L-Formeln ersetzt wurden.

Definition

Eine Tautologie ist eine allgemeingültige Aussage, bei der die Variablen durch L-Formeln ersetzt wurden.

Satz

Tautologien sind allgemeingültig.

Definition

Eine Tautologie ist eine allgemeingültige Aussage, bei der die Variablen durch L-Formeln ersetzt wurden.

Satz

Tautologien sind allgemeingültig.

Beweis: Setze φ in f = f(p_1,...,p_n). Es folgt für alle Belegungen β:
$\mathcal{U} \models f(\varphi_1, ..., \varphi_n)[\beta] \Leftrightarrow \mathcal{U} \models f(p_1, ..., p_n)[\beta]$ □

Satz (Axiome der Gleichheit)

$$\forall x\ x{=}x \qquad \textit{(Reflexivität)}$$
$$\forall x, y\ (x = y \rightarrow y = x) \qquad \textit{(Symmetrie)}$$
$$\forall x, y, z\ (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z) \qquad \textit{(Transitivität)}$$
$$\forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\ (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \rightarrow fx_1 \ldots x_n = fy_1 \ldots y_n) \qquad \textit{(Kongruenz)}$$
$$\forall x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\ (x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \rightarrow (Rx_1 \ldots x_n \leftrightarrow Ry_1 \ldots y_n)) \qquad \textit{(Kongruenz)}$$

Dabei sind die f n-stellige Funktionszeichen und R die n-stellige Relationszeichen aus L

Historische Entwicklung der mathematischen Gleichheit

Entwicklung des Gleichheitszeichen

-Antike, Mittelalter est egale ausgeschrieben

-1596-1650 ae (180°)lat. aequalis

-Recorde 1557 heutiges Gleichheitszeichen

Historische Entwicklung der mathematischen Gleichheit

Entwicklung des Gleichheitszeichen
-Antike, Mittelalter est egale ausgeschrieben
-1596-1650 ae (180°)lat. aequalis
-Recorde 1557 heutiges Gleichheitszeichen

Entwicklung der Relation
-Leibniz Gesetz
Wenn a=b dann gilt für jede Äquivalenzrelation $\sim$: $a \sim b$
-Extensionalitätsaxiom Dedekind 1888$\rightarrow$
Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre ZF/ZFC
$\forall A, B : (A = B \leftrightarrow \forall C : (C \in A \leftrightarrow C \in B))$

Satz ($\exists -$ *Quantorenaxiome*)

Sei φ eine L-Formel, t ein L-Term und x frei für t in φ . Dann ist

$$\varphi\frac{t}{x} \rightarrow \exists x \varphi$$

allgemeingültig.

Es ist notwendig x frei für t in φ vorauszusetzen. Dies zeigt uns das Beispiel. Sei $\varphi = \forall y \; y = x$ und $t = y$. Die Aussage $\forall y \; y = y \rightarrow \exists x \forall y \; x = y$ ist nicht allgemeingültig.

Satz ($\exists -$ *Quantorenaxiome*)

Sei φ eine L-Formel, t ein L-Term und x frei für t in φ . Dann ist

$$\varphi\frac{t}{x} \to \exists x \varphi$$

allgemeingültig.

Es ist notwendig x frei für t in φ vorauszusetzen. Dies zeigt uns das Beispiel. Sei $\varphi = \forall y\ y = x$ und $t = y$. Die Aussage $\forall y\ y = y \to \exists x \forall y\ x = y$ ist nicht allgemeingültig.

Beweis: Sei β eine Belegung mit Werten in $\mathcal{U}$. Dann folgt aus dem Substitutionslemma.

$$\mathcal{U} \models \varphi\frac{t}{x}[\beta] \to \mathcal{U} \models \varphi[\beta\frac{t^{\mathcal{U}}[\beta]}{x}] \to \mathcal{U} \models \exists x \varphi[\beta] \qquad \square$$

Satz (Modus Ponens)

Wenn $\varphi \wedge (\varphi \to \psi)$ *allgemeingültig, dann auch* ψ.
Anders ausgedrückt $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$

Satz (Modus Ponens)

Wenn $\varphi \land (\varphi \to \psi)$ *allgemeingültig, dann auch* ψ*.*
Anders ausgedrückt $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$

Beispiel: Setze $\varphi \to \psi =$ (Wenn es regnet, wird die Straße nass).
Setze $\varphi =$ (Es regnet). Aus dem Modus Ponens folgt, dass die Straße nass wird.

Satz (Modus Ponens)

Wenn $\varphi \wedge (\varphi \to \psi)$ allgemeingültig, dann auch ψ.
Anders ausgedrückt $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$

Beispiel: Setze $\varphi \to \psi =$ (Wenn es regnet, wird die Straße nass).
Setze $\varphi =$ (Es regnet). Aus dem Modus Ponens folgt, dass die Straße nass wird.

Satz ($\exists$ -Einführung)

Wenn x nicht frei in ψ vorkommt, dann ist mit $\varphi \to \psi$ auch $\exists x \varphi \to \psi$ allgemeingültig.

Satz (Modus Ponens)

Wenn $\varphi \wedge (\varphi \to \psi)$ allgemeingültig, dann auch ψ.
Anders ausgedrückt $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$

Beispiel: Setze $\varphi \to \psi =$ (Wenn es regnet, wird die Straße nass).
Setze $\varphi =$ (Es regnet). Aus dem Modus Ponens folgt, dass die Straße nass wird.

Satz ($\exists$ -Einführung)

Wenn x nicht frei in ψ vorkommt, dann ist mit $\varphi \to \psi$ auch $\exists x \varphi \to \psi$ allgemeingültig.

Beweis: Wenn $\mathcal{U} \models \exists x \varphi[\beta]$, gibt es ein $a \in A$ mit $\mathcal{U} \models \varphi[\beta\frac{a}{x}]$. Ist $\varphi \to \psi$ allgemeingültig, so gilt auch $\mathcal{U} \models \psi[\beta\frac{a}{x}]$. Aus dem Koinzidenzsatz folgt dann $\mathcal{U} \models \psi[\beta]$ $\square$

Proseminar Wintersemester 2018/19

Von Hilberts Kalkül zu Gödels Sätzen

Lilia Neb

21.Dezember 2018

Der Gödelsche Vollständigkeitssatz Teil 1
Basierend auf dem Buch Mathematische Logik von Martin Zeigler, 2.Auflage, Birkhäuser 2017.

Der Vortrag behandelt das Thema des Hauptssatzes in der mathematischen Aussagenlogik, benannt nach dem gleichnamigen Mathematiker und Philosophen Kurt Gödel (1906-1978): Der Gödelsche Vollständigkeitssatz.
Der Gödelsche Vollständigkeitsatz zeigt, dass der zunächst informelle Begriff des Beweises tatsächlich adäquat formalisiert werden kann. Erst dadurch werden mathematische Untersuchungen von Beweisen möglich.

Satz 4.1 ***Vollständigkeitssatz:***
Eine Formel ist genau dann allgemeingültig, wenn sie beweisbar ist:

$$\models \varphi \iff \vdash \varphi$$

Oder anders formuliert:
φ ist genau dann allgemeingültig, wenn φ im Kalkül bewiesen werden kann.

Der Gödelsche Vollständigkeitssatz zeigt für den Hilbert Kalkül die Korrektheit und Vollständigkeit: Jeder Satz, der semantisch aus einer Formelmenge folgt, lässt sich mit Schlussregeln und Axiomen des Systems aus der Formelmenge herleiten und umgekehrt.

Ziel: Beweis des Vollständigkeitssatzes

Definition 4.2 *: Der Hilbert Kalkül*
Sei L eine Sprache. Eine L-Formel ist beweisbar, wenn sie

B1 Tautologie ist

B2 Gleichheitsaxiom ist

B3 $\exists$-Quantorenaxiom ist

B4 sich mit Hilfe der Modus Ponens Regel aus zwei beweisbaren L-Formeln ergibt

B5 oder mit der Regel der $\exists$-Einführung aus einer beweisbaren L-Formel ergibt.

[1]

Eine Formel φ ist also genau dann beweisbar, wenn sie einen Beweis hat, d.h. eine Folge $\varphi_1 \dots \varphi_n = \varphi$ von L-Formeln φ_i, die entweder Axiome sind oder mit einer der beiden Schlussregel aus Formeln φ_j (j<i) folgen.

$$Notation: \vdash_L \varphi$$

Beweis 1

$\Leftarrow$: (Korrektheitssatz)
Die Menge der allgemeingültigen Sätze hat wegen der Lemmata aus Kap. 3 die Eigenschaften B1-B5. Daraus folgt, dass die Menge der beweisbaren Sätze allgemeingültig sind. Dies genügt damit für die Rückrichtung.
Im weiteren Verlauf befassen wir uns mit der Hinrichtung des Beweises, welche auch den Rest des Kapitels ausmacht.
Dazu müssen wir jedoch einige Ergänzungen vornehmen. Die folgenden Lemmas bieten den Schlüssel für den Beweis des Vollständigkeitssatzes und sind uns bereits in ähnlicher Form bekannt.

Lemma 4.3 *:*

1. *(Aussagenlogik):*
   Wenn $\varphi_1 \dots \varphi_n$ beweisbar sind und $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \longrightarrow \psi$ Tautologie ist, ist auch ψ beweisbar.

2. *($\forall$- Quantorenaxiome):*
   Wenn x frei für t in φ, ist $\vdash_L \forall x\varphi \longrightarrow \varphi\frac{t}{x}$.

3. *($\forall$-Einführung):*
   Wenn x nicht frei in φ ist, dann folgt aus der Beweisbarkeit von $\varphi \longrightarrow \forall x\psi$. Insbesondere folgt aus der Beweisbarkeit von ψ.

<u>Beweis</u>:

1. Angenommen es gelte die Aussage $(\varphi_1 \dots \varphi_n) \longrightarrow \psi$ ist beweisbar. Dann folgt daraus, dass $((\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \longrightarrow \psi) \longrightarrow (\varphi_1 \longrightarrow (\varphi_2 \longrightarrow (\dots(\varphi_n \longrightarrow \psi)\dots)))$ Tautologie ist.
   Mit Modus Ponens folgt: $\varphi_1 \longrightarrow (\varphi_2 \longrightarrow (\dots(\varphi_n \longrightarrow \psi)\dots))$ beweisbar.
   Nach n-maliger Anwendung der Modus Ponens Regel folgt: $\vdash_L \psi$

[1]$\Longrightarrow$ Vgl. Lemmata aus Kapitel 3

2. Aus Kapitel 3 wissen wir : $\neg\varphi\frac{t}{x} \longrightarrow \exists x \neg\varphi$ ist $\exists$-Quantorenaxiom.
   $(\neg\varphi\frac{t}{x} \longrightarrow \exists x\neg\varphi \longrightarrow (\neg\exists x\neg\varphi \longrightarrow \varphi\frac{t}{x})$ ist Tautologie.
   Mit Modus Ponens folgt: $\vdash_L \neg\exists x\neg\varphi \longrightarrow \varphi\frac{t}{x}$.

3. Wenn $\vdash_L \varphi \longrightarrow \psi \Rightarrow \vdash_L \neg\psi \longrightarrow \neg\varphi$.
   Dann folgt mit der $\exists$-Einführung: $\vdash_L \exists x\neg\psi \longrightarrow \neg\varphi \Rightarrow \vdash_L \varphi \longrightarrow \neg\exists x\neg\psi$.
   Angenommen ψ ist beweisbar.
   Wähle dann φ Tautologie, die x nicht frei enthält.
   $\Rightarrow$ Aussagenlogik ergibt die Beweisbarkeit von $\varphi \longrightarrow \psi \Rightarrow \varphi \longrightarrow \forall$ x ψ.
   Mit Modus Ponens folgt: $\vdash_L \forall x\psi$.

$\square$

Lemma 4.4 *:*
Sei $\varphi(x_1 \dots x_n)$ L-Formel, C Menge von neuen Konstanten und $c_1, \dots, c_n$ Folge von paarweise verschiedenen Elementen von C.
Dann ist

$$\vdash_{L\cup C} \varphi(c_1 \dots c_n) \Longleftrightarrow \vdash_L \varphi(x_1 \dots x_n).$$

Beweis:

Bemerkung: Ein L-Beweis von ψ ist Folge von L-Formeln, die entweder Axiome sind oder mit den Regeln aus früheren Formeln folgen, bei ψ endet.
Sei $B(c_1 \dots c_n)$ $L \cup C$ -Beweis von $\varphi(c_1, \dots, c_n)$.
oBdA: Alle Konstanten in $c_1 \dots c_n$ drin.
$\Rightarrow$ Ersetze im Beweis Konstanten c_i durch Variablen y_i dann erhalten wir einen L-Beweis $B(y_1, \dots, y_n)$ von $\varphi(y_1, \dots, y_n)$.
$\forall - Einführung$ ergibt n-mal angewendet $\forall y_1 \dots y_n \; \varphi(y_1, \dots, y_n)$
Mit $\forall$-Quantorenaxiom:

$\Rightarrow \forall \; y_1, \dots, y_n \; \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, y_n) \longrightarrow \forall y_{i+1}, \dots, y_n \varphi(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$.
$\Rightarrow \vdash_L \varphi(x_1, \dots, x_n)$

Umgekehrt:

$$\begin{aligned} \vdash_L \varphi(x_1, \dots, x_n) \;\; &\Rightarrow \;\; \vdash_L \forall x_1, \dots, x_n \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &\Rightarrow \;\; \vdash_{L\cup C} \varphi(c_1, \dots, c_n). \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung:

1. Eine *L-Theorie* ist die Menge von L-Aussagen.
   Eine L-Theorie T heißt *widerspruchsfrei* oder konsistent, wenn man nicht Aussagen

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ aus T finden kann, die sich widersprechen, d.h. für die $\vdash_L \neg(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, dabei spielt die Klammerung und Reihenfolge der φ_i aufgrund von Lemma 4.3 (1) keine Rolle.

Eine Aussage φ ist dabei genau dann nicht beweisbar, wenn $\{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei ist.
Denn:
$\vdash \varphi \Rightarrow \vdash \neg\neg\varphi$ und $\vdash \neg(\neg\,\varphi \wedge \dots \wedge \neg\varphi) \Rightarrow \vdash \varphi$.

2. Ein *Modell* von T ist L-Struktur, in der alle Aussagen aus T gelten.

Satz 4.5 *:*
Eine Theorie hat genau dann ein Modell, wenn sie widerspruchsfrei ist.

Bemerkung:

1. *Der Vollständigkeitssatz folgt somit aus dem Satz, da T als L-Theorie auch unendlich sein kann und damit noch eine wesentliche Verstärkung darstellt.*

2. *Mit dem Satz haben wir ebenfalls gezeigt, dass für jede Erweiterung K von L, T als K-Theorie widerspruchsfrei ist, wenn wir annehmen, dass T eine widerspruchsfreie L-Theorie und somit nach Lemma 4.2 T auch als $L \cup C$-Theorie widerspruchsfrei ist.*

Beweis:

Eine Theorie, die ein Modell hat, muss nach dem Korrektheitssatz auch widerspruchsfrei sein. Für die umgekehrte Richtung müssen wir zu einer widerspruchsfreien L-Theorie T ein Modell konstruieren, durch Erweiterung von T zu T , die aussieht wie das vollständige Diagramm einer L-Struktur $\mathcal{A}$: Man indiziert die Elemente von A mit neuen Konstanten aus einer Menge C*

$$A = \{a_c \mid c \in C\}.$$

Das vollständige Diagramm ist dann die Menge aller $L \cup C$-Aussagen, die in der $L \cup C$-Struktur $\mathcal{A}^* = (\mathcal{A}, a_c)_{c \in C}$ gelten.

Damit ist das vollständige Diagramm eine vollständige Henkintheorie im Sinne folgender Definition:

Definition 4.6

1. *Eine $L \cup C$-Theorie T^+ nennt man Henkintheorie mit Konstantenmenge C, wenn es zu jeder $L \cup C$-Formel $\varphi\ (x)$ eine Konstante $c \in C$ gibt mit $\exists\ x\varphi(x) \rightarrow\ \varphi(c) \in T^+$.*

2. *K-Theorie T^* heißt vollständig, wenn sie widerspruchsfrei ist und $\varphi \in T^*\ \vee\ \neg\varphi \in T^*$ für jede K-Aussage φ.*

Beweis 2 *zu Hinrichtung des Vollständigkeitssatzes:*

Schritt 1:
T ist in einer widerspruchsfreien Henkintheorie T^+ enthalten.

Beweis:

1. *Sei $\varphi\ (x)$ eine L-Formel und c eine neue Konstante.*
   Dann ist $T \cup \{(\exists\ x\varphi(x) \rightarrow \varphi(c))\}$ widerspruchsfrei.
   Denn wenn für eine L-Aussage ψ

   $$\begin{aligned} & \vdash_{L\cup\{c\}}\ \neg(\psi\ \wedge\ (\exists x\varphi(x) \Longrightarrow \varphi(c))) \\ so\ folgt\ mit\ Aussagenlogik: & \\ & \vdash_{L\cup\{c\}} \neg\exists x\varphi(x) \Longrightarrow \neg\psi und \vdash_{L\cup\{c\}} \varphi(c) \Longrightarrow \neg\psi. \end{aligned}$$

   Aus Lemma 4.4 folgt:
   $\vdash_L \neg\ \exists x\varphi(x)$ und $\vdash_L \varphi(x) \Longrightarrow \neg\psi$.
   Also ergibt sich insgesamt: $\vdash_L \neg\psi$.

   Daraus ergibt sich:
   Wenn T widerspruchsfrei ist, dann kann es keine $\psi_1, \ldots, \psi_n\ \in T$ mit $\vdash_{L\cup\{c\}} \neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge (\exists x\varphi(x) \Longrightarrow \varphi(c))$ geben. Daraus folgt, dass wenn man für jede L-Formel $\varphi(x)$ eine eigene Konstante c_φ einführt, die Theorie $T_1 = T \cup \{\exists x\varphi(x) \Longrightarrow \varphi(c_\varphi) \mid \varphi(x) L - Formel\}$ widerspruchsfrei ist.

2. *Nun führt man für jede $L \cup C_1$-Formel eine neue Konstante ein und erhalte eine $L \cup C_1 \cup C_2$- Theorie T_2.*
   Wenn man weiter so vorgeht, erhält man eine Henkintheorie $T^+ = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} T_i$ mit Konstantenmenge $C = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$.
   T^+ ist widerspruchsfrei, da endlich viele genügend Aussagen aus T^+ immer schon in einem genügend großen T_i vorkommen und sich daher nicht widersprechen können.

Schritt 2:
Jede widerspruchsfreie K-Theorie T^+ lässt sich zu einer vollständigen K-Theorie T^* erweitern.

Schritt 3:
Eine vollständige Henkintheorie T^* hat ein Modell aus Konstanten, d.h. ein Modell $\mathfrak{A}^* = (\mathfrak{A}, a_c)_{c \in C}$ mit $A = \{a_c \mid c \in C\}$. $\mathfrak{A}^*$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis: siehe Teil 2

$\square$

Der Gödelsche Vollständigkeitssatz, Teil 2

André Bruner

21. Dezember 2018

Wiederholung

Satz

Eine Theorie hat ein Modell $\Leftrightarrow$ *Eine Theorie ist widerspruchsfrei*

Wiederholung

Defintion 1.1

1. Eine $L \cup C$ -Theorie T^+ heißt **Henkintheorie mit Konstantenmenge C**, wenn es zu jeder $L \cup C$-Formel $\varphi(x)$ eine Konstante $c \in C$ gibt mit $(\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c)) \in T^+$
2. Eine K-Theorie T^* ist **vollständig**, wenn sie widerspruchsfrei ist und wenn $\varphi \in T^*$ oder $\neg\varphi \in T^*$ für jede K - Aussage φ

Schritt 1:
T ist in einer widerspruchsfreien Henkintheorie T^+ enthalten.

Schritt 2:
Jede widerspruchsfreie K-Theorie T^+ lässt sich zu einer vollständigen K-Theorie T^* erweitern.

Beweis.

Sei φ eine K-Aussage.

Angenommen, weder $T^+ \cup \{\varphi\}$ noch $T^+ \cup \{\neg\varphi\}$ sind widerspruchsfrei.

Dann gibt es Aussagen ψ_i und χ_i aus T^+, für die gilt:

$\vdash_K \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \varphi$ und $\vdash_K \chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_m \to \neg\varphi$

$\Rightarrow_{A.L.} \vdash_K \neg(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \wedge \chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_m)$

$\Rightarrow$ T^+ nicht widerspruchsfrei.

$\Rightarrow$ Es ist also immer $T^+ \cup \{\varphi\}$ oder $T^+ \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei $\square$

Fortsetzung des Beweises.

- Wenn K höchstens abzählbar ist, erhalten wir T^*, indem wir die Menge aller K-Aussagen als $\varphi_0,\varphi_1,\ldots$ aufzählen und der Reihe nach entweder φ_i oder $\neg\varphi_i$ hinzunehmen.

Fortsetzung des Beweises.

- Wenn K höchstens abzählbar ist, erhalten wir T^*, indem wir die Menge aller K-Aussagen als $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ aufzählen und der Reihe nach entweder φ_i oder $\neg\varphi_i$ hinzunehmen.
- Falls K überabzählbar, verwende Lemma von Zorn:
  Weil die Vereinigung jeder Kette von widerspruchsfreien K-Theorien widerspruchsfrei ist, gibt es eine maximale widerspruchsfreie K-Theorie T^*, in der T^+ enthalten ist.
  Dann: $T^* \cup \{\varphi\}$ widerspruchsfrei $\Leftrightarrow \varphi \in T^*$
  $\Rightarrow T^*$ ist vollständig.

$\square$

Aus der VOLLSTÄNDIGKEIT folgt, dass T^* **deduktiv abgeschlossen** ist, d.h.,
falls $\psi_1, \ldots, \psi_n$ zu T^* gehören und $\vdash_K \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \rightarrow \varphi$, dann gehört auch φ zu T^*

Schritt 3:
Eine vollständige Henkintheorie T^* hat ein Modell aus Konstanten, d.h. ein Modell $\mathcal{A}^* = (\mathcal{A}, a_c)_{c \in C}$ mit $A = \{a_c : c \in C\}$.
$\mathcal{A}^*$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis Eindeutigkeit.

Sei $\mathcal{B}^* = (\mathcal{B}, b_c)_{c \in C}$ ein zweites Modell aus Konstanten.
Weil T^* vollständig ist, ist T^* die Menge aller $L \cup C$ - Aussagen, die in $\mathcal{A}^*$ gelten.
Es gilt also $\forall$ $L \cup C$ - Aussagen φ:
$\mathcal{A}^* \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in T^* \Leftrightarrow \mathcal{B}^* \models \varphi$.
Weil daher:
$a_c = a_d \Leftrightarrow \mathcal{A}^* \models c \doteq d \Leftrightarrow \mathcal{B}^* \models c \doteq d \Leftrightarrow b_c = b_d$, liefert $f(a_c) = b_c$ eine Bijektion, die die Interpretation der Konstanten aus C respektiert. $\square$

Fortsetzung Beweis Eindeutigkeit.

- Ebenfalls werden die RELATIONEN respektiert: $\mathcal{R}^{\mathcal{A}}(a_{c_1}, \ldots, a_{c_n}) \Leftrightarrow \mathcal{A}^* \models R(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow \mathcal{B}^* \models R(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow \mathcal{R}^{\mathcal{B}}(b_{c_1}, \ldots, b_{c_n})$
- Für FUNKTIONEN und KONSTANTEN $f \in L$ gilt: $f^{\mathcal{A}}(a_{c_1}, \ldots, a_{c_n}) = a_{c_0} \Leftrightarrow f^{\mathcal{B}}(b_{c_1}, \ldots, b_{c_n}) = b_{c_0}$.

$\square$

Beweis Existenz.

Um $\mathcal{A}^*$ zu konstruieren, müssen wir Elemente $a_c, (c \in C)$ finden mit

(1) $a_c = a_d \Leftrightarrow c \doteq d \in T^*$

gilt genau dann, wenn
$c \sim d \Leftrightarrow c \doteq d \in T^*$ Äquivalenzrelation ist, da wir dann für a_c die Äquivalenzklasse von c nehmen können. □

Fortsetzung Beweis Existenz.

(**Reflexivität**)

$\Longrightarrow_{1. Gleichheitsaxiom + \forall - Quantorenaxiom}$

$\vdash_{L \cup C} c \doteq c$

$\Longrightarrow_{T^* ded.abg.}$

$c \doteq c \in T^* \Rightarrow \sim reflexiv$

(**Transitivität**)

$(c \doteq d \wedge d \doteq e \rightarrow c \doteq e) \in T^*.$

$c \doteq d \in T^* \wedge d \doteq e \in T^* \Longrightarrow_{ded.abg.} c \doteq e \in T^* \Rightarrow \sim transitiv.$

(**Symmetrie**)

folgt aus dem 3. Gleichheitsaxiom. $\square$

Fortsetzung Beweis Existenz.

Setze $A = \{a_c : c \in C\}$. Für jedes Relationszeichen $R \in L$ muss nun eine Relation $R^{\mathcal{A}}$ auf A gefunden werden, sodass

(2) $R^{\mathcal{A}}(a_{c_1}, \ldots, a_{c_n}) \Leftrightarrow R(c_1, \ldots, c_n) \in T^*$

Aus dem 5. Gleichheitsaxiom folgt, dass:
$a_{c_1} = a_{d_1}, \ldots, a_{c_n} = a_{d_n}, R(c_1, \ldots, c_n) \Rightarrow R(d_1, \ldots, d_n) \in T^*$ $\square$

Fortsetzung Beweis Existenz.

Sei f ein n-stelliges Funktionszeichen (Konstante: n=0) aus L. Die Operation $f^{\mathcal{A}}$ auf A muss so definiert werden, dass

(3) $f^{\mathcal{A}}(a_{c_1}, \dots, a_{c_n}) = a_{c_0} \Leftrightarrow f(c_1, \dots, c_n) \doteq c_0 \in T^*$

Aus $\vdash_{L \cup C} f(c_1, \dots, c_n) \doteq f(c_1, \dots, c_n)$ folgt aber mit $\exists$-Quantorenaxiom:
$\vdash_{L \cup C} \exists x f(c_1, \dots, c_n) \doteq x$
Da T^* Henkintheorie: $\exists c_0 \in C$ mit
$(\exists x f(c_1, \dots, c_n) \doteq x \to f(c_1, \dots, c_n) \doteq c_0) \in T^*$.
$\Longrightarrow_{ded.abg.} f(c_1, \dots, c_n) \doteq c_0 \in T^*$ (rechte Seite von (**3**)

$\square$

Fortsetzung Beweis Existenz.

Zweitens ist a_{c_o} durch die rechte Seite von $(\mathbf{3})$ eindeutig bestimmt und hängt nur von den $a_{c_1}, \ldots, a_{c_n}$ ab, d.h $c_0 \doteq d_0$ gehört zu T^*, denn aus der deduktiven Abgeschlossenheit und den Gleichheitsaxiomen folgt:
$c_1 \doteq d_1, \ldots, c_n \doteq d_n, f(c_1, \ldots, c_n) \doteq c_0$ und $f(d_1, \ldots, d_n) \doteq d_0$ und somit $c_0 \doteq d_0 \in T^*$. $\square$

Fortsetzung Beweis Existenz.

Konstante Terme (Terme ohne Variable) werden in $\mathcal{A}^*$ so ausgerechnet, wie es T^* sagt:

(4) $t^{\mathcal{A}^*} = a_c \Leftrightarrow t \doteq c \in T^*$

Zeige induktiv über Aufbau von t:

- Falls t Konstante aus C ist, folgt die Beh. aus **(1)**
- Falls $t = ft_1 \dots t_n$ und $t_i^{\mathcal{A}^*} = a_{c_i}$, sind nach Induktionsvorr. die Gleichungen $t_i \doteq c_i$ in T^*

$\Longrightarrow_{4. \textit{Gleichheitsaxiom}}$
$t \doteq c \in T^* \Leftrightarrow fc_1 \dots c_n \doteq c \in T^*$
Andererseits ist:
$t^{\mathcal{A}^*} = a_c \Leftrightarrow f^{\mathcal{A}^*}(a_{c_1}, \dots, a_{c_n}) = a_c \Leftrightarrow fc_1 \dots c_n \doteq c \in T^*$ $\square$

Fortsetzung Beweis Existenz.

Zuletzt beweisen wir induktiv über den Aufbau der Aussage φ, dass $\mathcal{A}^* \Leftrightarrow \varphi \in T^*$.

- 1. Fall: $\varphi = t_1 \doteq t_2$
  Sei $t_i^{\mathcal{A}^*} = a_{c_i}$.
  Dann ist nach (**4**) $t_i \doteq c_i \in T^*$ für $i = 1, 2$ und daher
  $\mathcal{A}^* \models \varphi \Leftrightarrow a_{c_1} = a_{c_2} \Leftrightarrow c_1 \doteq c_2 \in T^* \Leftrightarrow t_1 \doteq t_2 \in T^*$.
- 2. Fall: $\varphi = Rt_1 \dots t_n$
  Sei $t_i^{\mathcal{A}^*} = a_{c_i}$.
  Dann ist nach (**4**) $t_i \doteq c_i \in T^*$ für $i = 1, \dots, n$ und
  $\mathcal{A}^* \models \varphi \Leftrightarrow Rc_1 \dots c_n \in T^*$
  $\Longleftrightarrow_{5.Gl.axiom} \varphi \in T^*$

$\square$

Fortsetzung Beweis Existenz.

- 3. Fall: $\varphi = \neg\psi$
  Da T^* vollständig ist, gilt:
  $\mathcal{A}^* \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A}^* \not\models \psi \Leftrightarrow \psi \notin T^* \Leftrightarrow \varphi \in T^*$.
- 4. Fall: $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$
  Aus der deduktiven Abgeschlossenheit von T^* folgt:
  $\mathcal{A}^* \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A}^* \models \psi_i (i = 1, 2) \Leftrightarrow \psi_i \in T^* (i = 1, 2) \Leftrightarrow \varphi \in T^*$.
- 5. Fall: $\varphi = \exists x \psi$. $\psi(c) \in T^*$ für ein $c \in C \Rightarrow_{ded.Abg.} \exists\psi \in T^*$
  Da $\exists x \psi \in T^*$ und $\exists\psi \to \psi(c) \in T^* \Rightarrow \psi(c) \in T^*$.

$\square$

Fortsetzung Beweis Existenz.

Wir haben

$\mathcal{A}^* \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A}^* \vDash \psi[a_c]$ für ein $c \in C$

$\Leftrightarrow \mathcal{A}^* \vDash \psi(c)$ für ein $c \in C$

$\Leftrightarrow \psi(c) \in T^*$ für ein $c \in C$

$\Leftrightarrow \varphi \in T^*$. $\square$

Defintion 5.1

Sei T eine L-Theorie und φ eine L-Aussage.

1. φ ist in T **beweisbar**, Notation: $T \vdash \varphi$, wenn es Axiome $\psi_1, \ldots, \psi_n \in T$ gibt, für die $\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \rightarrow \varphi$ beweisbar ist.
2. φ **folgt logisch** aus T, $T \models \varphi$, wenn φ in allen Modellen von T gilt.

Folgerungen, ohne Beweis

Folgerung

$T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \Vdash \varphi$

Folgerung (Kompaktheitssatz)

Ein Theorie hat genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teilmenge ein Modell hat.

Folgerung (Löwenheim-Skolem)

Wenn eine Theorie mit höchstens abzählbarer Sprache ein Modell hat, hat sie ein höchstens abzählbares Modell.

Literaturverzeichnis

Ziegler, M.: „Mathematische Logik “.
2. Auflage, Birkhäuser, 2017.

Axiome der Mengenlehre Teil 1

Proseminar:"Grundlagen der Mathematik"

Prof. Dr. C. Thäle

Wintersemester 2018/19

Sarah-Marie Grabeck
108017205660
Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

21.Dezember 2018

Inhaltsverzeichnis

1. Die naive Mengenlehre

1.1 Einführung

In der Mathematik spielt die Mengenlehre eine sehr bedeutende Rolle, denn fast alle Begriffe der gewöhnlichen Mathematik lassen sich mit ihr ausdrücken. Sie bildet ein Fundament der Mathematik, dessen Wichtigkeit nicht unterschätzt werden sollte. Schaut man sich einige Beispiele an, wird das sehr schnell deutlich:
Ein metrischer Raum besteht aus einer Menge X und einer Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$
Die Funktion besitzt wiederum eine Definitionsmenge, die eine Menge von Paaren (x,y) ist.
Ein Paar wiederum ist ebenfalls eine Menge, auf die ich später noch eingehen werde.

All dies kann mithilfe der Mengenlehre beschrieben und erklärt werden. Jedoch gibt es viele verschiedene Auffassungen und somit auch verschiedene Mengenlehren. Zunächst möchte ich mit der Naiven Mengenlehre beginnen:
Die naive Mengenlehre beruht auf einer bekannten Definition Cantors[1], nämlich: „Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (, welche „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“ Versucht man Cantors Verständnis von Mengen zu formalisieren, so ergeben sich zwei Axiome.

1.2 Die Axiome der Naiven Mengenlehre

Die Sprache der Mengenlehre ist $L_{Me} = \{\in\}$. Man liest "$x \in y$" als *x ist Element von y*.

1.2.1 Extensionalität

Das Extensionalitätsaxiom kann wie folgt wörtlich umschrieben werden: Zwei Mengen heißen gleich, wenn sie die selben Elemente haben. Mathematisch lässt sich das wie folgt ausdrücken: Seien x,y Mengen. (Notiz: Mengen werden ab sofort mit Kleinbuchstaben bezeichnet in Anlehnung an die prädikatenlogische Konvention Variablen immer klein zu schreiben und in Anlehnung an die Primärliteratur) Dann gilt:

$$\forall x, y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

Das bedeutet also, dass, wenn alle Elemente z aus x auch alle Elemente der Menge y bilden, diese beiden Mengen x und y gleich sind.

[1] Georg Cantor:1845-1918.

1.2.2 Volle Komprehension

Das Axiom der vollen Komprehension lässt sich verbal inwiefolgt zusammenfassen: "Jede definierbare Klasse von Mengen ist die Klasse der Elemente einer Menge. Mathematisch bedeutet das: Für alle Formeln

$$\varphi(x, y_1, ..., y_n)$$

gilt:

$$\forall y_1 ... y_n \exists x \forall z (z \in x \leftrightarrow \varphi(z, y_1, ..., y_n))$$

Das Axiom besagt also, dass für jede Formel

$$\varphi(z, y_1, ..., y_n)$$

und fixe Parameter $y_1, ..., y_n$ die Klasse

$$\{z | \varphi(z, y_1, ..., y_n)\}$$

eine Menge ist. Daraus würde sich schließen lassen, dass jede Klasse auch eine Menge ist. Dass das ein Problem für uns ist, sehen wir ein, wenn wir das nächste Unterkapitel betrachten.

1.2.3 Die Russellsche Antinomie

Das System, welches alle Mengen beinhaltet, scheint die obigen Axiome zu erfüllen, jedoch gibt es dabei ein Problem, welches durch die Russellsche Antinomie beschrieben wird[2]:

Satz (Russellsche Antinomie)
Die naive Mengenlehre ist inkonsistent. (d.h. widersprüchlich)

Beweis Wir betrachten die Formel $\varphi(x) = \neg x \in x$
Aus dem Komprehensionsaxiom folgt dann folgendes Axiom:

$$\exists x \forall z (z \in x \leftrightarrow \neg z \in z)$$

Wenn aber x eine Menge mit $\forall z (z \in x \leftrightarrow \neg z \in z)$ ist, also

$$x = \{z | \neg z \in z\},$$

liefert die Einsetzung von x für z den Widerspruch: $x \in x \leftrightarrow \neg x \in x$
Damit ist der Satz bewiesen. □
Zur näheren Erklärung werden wir uns in Abschnitt 2.2.2 noch intensiver mit der Russellschen Antinomie beschäftigen.

Dieser Beweis zog natürlich einige Konsequenzen mit sich, weshalb es heute viele verschiedene Axiomensysteme der Mengenlehre gibt. Durchgesetzt hat sich dabei die ZFC-Mengenlehre, auf die ich im folgenden Kapitel eingehen möchte.

[2]Sie stammt von dem Mathematiker Bertrand Russell(1872-1970)

2. Die ZFC Mengenlehre

2.1 Grundlegendes und Motivation

Die ZFC-Mengenlehre ist benannt nach seinen Gründern Ernst Zermelo[3] und Abraham Fraenkel [4], sowie nach dem Auswahlaxiom (axiom of **c**hoice). (Es gibt auch eine ZF-Mengenlehre, die das Auswahlaxiom nicht beinhaltet). Die ZFC-Mengenlehre enstand zu Beginn des 20.Jahrhunderts. Seine Axiome wurden in den Jahren 1908-1921 von den beiden Begründern Zermelo und Fraenkel niedergeschrieben. Sie gehört zu den Mengenlehren, die sich ausschließlich mit dem Begriff der Menge beschäftigen und nicht zwischen Mengen und Klassen unterscheidet. Mittlerweile gehört die ZFC-Mengenlehre zu einer der wichtigsten Mengenlehren und konnte sich gegenüber anderen Mengenlehren durchsetzen, denn mit ihr lassen sich fast alle Aussagen der Mathematik so formulieren, dass sich in ZFC beweisbare Aussagen ergeben. Zurückzuführen ist die ZFC-Mengenlehre auf ein Axiomensystem, welches insgesamt aus 10 Axiomen besteht, von denen ich hier Folgende betrachte:

- Extensionalitätsaxiom
- Aussonderungsaxiom
- Paarmengenaxiom
- Vereinigungsaxiom

Bemerkung: Die Notation orientiert sich, wie bei der naiven Mengenlehre, vollständig an dem Buch Martin Zieglers [1]. Mengen werden hier klein geschrieben.

2.2 Die Axiome der ZFC-Mengenlehre

Das erste Axiom der Extensionalität beruht ebenfalls auf dem Extensionalitätsaxiom der naiven Mengenlehre. Die anderen Axiome sind alle Spezialfälle der Komprehension

2.2.1 Extensionalität

„Ist jedes Element einer Menge M gleichzeitig Element von N und umgekehrt, ist also gleichzeitig $M \subset N$ und $N \subset M$, so ist immer $M = N$. Oder kürzer: jede Menge ist durch ihre Elemente bestimmt.“ Ernst Zermelo, 1908

Das Extensionalitätsaxiom sagt etwas darüber aus, wann wir zwei Mengen als gleich ansehen können. Dies wird hier über die Beziehung der Teilmenge deutlich:

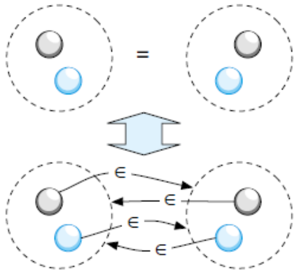
$$\forall x, y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

[3]Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, 1871-1953
[4]Adolf Abraham Halevi Fraenkel, 1891-1965

Wir können den Ausdruck $\forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$ nun mit $x \subset y$ abkürzen. Dies bedeutet: "x ist eine Teilmenge von y" (Alle Elemente aus x sind auch in y vertreten). Das Extensionalitätsaxiom kann man dann auch schreiben als:

$$\forall x, y(x \subset y \land y \subset x) \rightarrow x = y.$$

Das heißt also, dass zwei Mengen x und y gleich sind, wenn sie gegenseitig Teilmengen voneinander sind. Graphisch lässt sich das so darstellen: [5]



Nun folgen drei Sonderfälle der Komprehension.

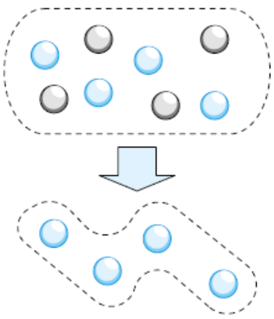
2.2.2 Aussonderung

„Durch jede Satzfunktion f(x) wird aus jeder Menge m eine Untermenge m_f ausgesondert, welche alle Elemente x umfasst, für die f(x) wahr ist. Oder: Jedem Teil einer Menge entspricht selbst eine Menge, welche alle Elemente dieses Teils enthält.“ Ernst Zermelo, 1908

Bei dem Aussonderungsaxiom geht es darum bestimmte Teilmengen aus einer Menge aussondern zu können, die wiederrum selbst Mengen sind. Mathematisch wird dies so formuliert:

$$\forall y_0, ..., y_n \exists x \forall z(z \in x \leftrightarrow (z \in y_0 \land \varphi(z, y_1, ..., y_n))).$$

Graphisch lässt sich das Axiom so veranschaulichen:



[5] Alle folgenden Grafiken entstammen ohne Ausnahme dem, im Literaturverzeichnis genanntem, Werk [2]

Im Prinzip bedeutet dieses Axiom eigentlich nur: Eine ausgesonderte Menge y mit Elementen aus der Menge x enthält alle Elemente aus x, die eine bestimmte Eigenschaft (hier die Formel φ) erfüllen, weshalb man sie in der Menge y zusammenfasst.
Dieses Axiom ist sehr bedeutend, denn es erlaubt uns nun zum Beispiel die Definition des Durchschnittes zweier Mengen

$$x \cap y = \{z \in x | z \in y\}$$

oder aber auch der Differenz:

$$x \setminus y = \{z \in x | \neg z \in y\}.$$

Ein weiterer wichtiger Schritt ist, dass wir nun definieren können, was die leere Menge ist. Nämlich:

$$\emptyset = \{z | \neg z = z\},$$

denn für eine beliebige Menge x ist $\emptyset = \{z \in x | z = \neg z\}$.
Mithilfe dieses Axioms wird nun auch die Russellsche Antinomie zu einem Theorem der ZFC-Mengenlehre. Man kann zeigen, dass nicht jede Sammlung von Mengen wieder eine Menge ist. Es ist nämlich beweisbar, dass die Klasse V aller Mengen keine Menge ist.

$$ZFC \vdash \neg \exists x \forall z : z \in x$$

Beweis:
Sonst wäre nach dem Aussonderungsaxiom die Russellsche Klasse (Das ist die Klasse aller Klassen, die sich selbst nicht als Element enthalten) $\{z | \neg z \in z\} = \{z \in v | \neg z \in z\}$ ebenfalls eine Menge, was sofort zum Widerspruch führt. Angenommen diese Klasse enthält sich selbst, dann gilt auf Grund der Eigenschaft, mit der wir die Klasse definiert haben, dass sie sich selbst doch nicht enthält, was ein Widerspruch ist. Andererseits können wir annehmen, dass die Klasse sich doch nicht selbst enthält, allerdings erfüllt dann diese Klasse ihre definierte Eigenschaft, so dass sie sich selbst doch wieder enthält. Dies gerade ist der Widerspruch, den die Russellsche Antinomie audsdrückt. Russell selbst versuchte seine These immer mit folgendem Beispiel zu Erklären: Stellen Sie sich einen Barbier vor. Der besagte Barbier rasiert genau diejenigen Männer, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert sich der Barbier selbst oder nicht?

2.2.3 Paarmenge

„Sind a,b irgend zwei Dinge des Bereichs, so existiert immer eine Menge $\{a,b\}$, welche sowohl a als [auch] b, aber kein von beiden verschiedenes Ding x als Element enthält.“ Ernst Zermelo, 1908

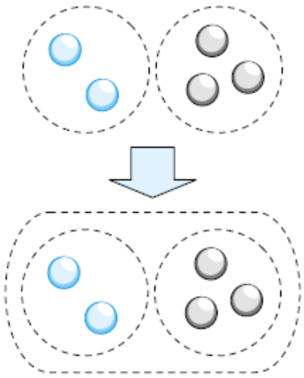
Das Paarungsaxiom ermöglicht uns zu verstehen, was ein Paar ist. Es gilt:

$$\forall y_1, y_2 \exists x \forall z : z \in x \leftrightarrow (z = y_1 \vee z = y_2).$$

Dieses Axiom drückt aus, dass

$$\{x,y\} = \{z | z = x \vee z = y\}$$

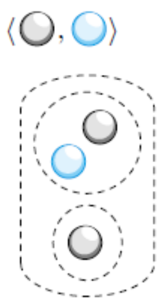
eine Menge ist, die aus x und y gebildete *Paarmenge*. Man kann sie sich ungefähr so vorstellen:



Definition:
Das geordnete Paar von zwei Mengen x und y ist die Menge

$$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}.$$

(x,y) heißt *Kuratowski-Paar*[6]. Hier ist besonders auf die Reihenfolge zu achten, denn $(x,y) \neq (y,x)$. Graphisch sieht ein Paar so aus:



[6] Kazimierz Kuratowski (1896-1980)

Lemma:
In ZFC ist beweisbar, dass:

$$\forall x, y, x', y' : (x, y) = (x', y') \rightarrow x = x' \wedge y = y'$$

Im Folgenden möchte ich an dieser Stelle einfach auf den Beweis aus Dirk Hoffmanns "Grenzen der Mathematik"[7] hinweisen. Dieser befindet sich auf den Seiten 169-173. Eine Ausführung wäre an dieser Stelle zu ausschweifend, da die Aussage des Lemmas für die meisten von uns verständlich ist und ein Beweis in ZFC sehr aufwändig ist.

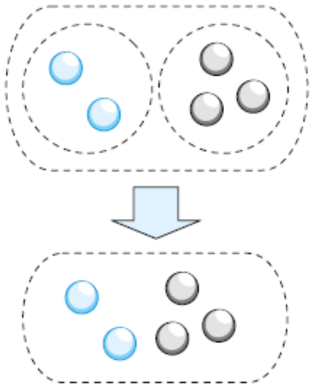
2.2.4 Vereinigung

„Jeder Menge T entspricht eine Menge S(T) (die ‚Vereinigungsmenge' von T), welche alle Elemente der Elemente von T und nur solche als Elemente enthält." Ernst Zermelo, 1908

Das Vereinigungsaxiom ermöglicht uns zu verstehen, was die Vereinigung von Mengen ist. Es gilt:

$$\forall y \exists x \forall z : z \in x \leftrightarrow \exists w (z \in w \wedge w \in y).$$

Graphisch sieht das Ganze so aus:



Durch dieses Axiom wird die Existenz von

$$\bigcup y = \{z | \exists w : (z \in w \wedge w \in y)\}$$

der Vereinigung der Elemente von y gefordert. Aus dem Paarmengenaxiom und dem Vereinigungsaxiom kann man dann folgern, was die Vereinigung von zwei Mengen sein

[7] Hoffmann, Dirk W.: Grenzen der Mathematik. Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik, Karlsruhe 2018 (3.Auflage). S.149-173.

soll:

$$x \cup y = \bigcup \{x, y\}$$

Weiterhin kann man rekursiv über n Folgendes definieren:

$$\{y_1, y_2, ..., y_{n+1}\} = \{y_1, ..., y_n\} \cup \{y_{n+1}\}.$$

Dies wird sich für die folgenden Axiome als sehr nützlich erweisen.

3. Schlusswort

Schon die ersten Axiome zeigen, wie wichtig die ZFC-Mengenlehre für die Mathematik ist und, dass sie als Fundament für fast alle Prinzipien der Mathematik gilt. Wir können nun also sagen, wann zwei Mengen gleich sind, was eine leere Menge ist, was der Durchschnitt und die Vereinigung zweier Mengen sind und was ein geordnetes Paar ist. Dieses Wissen ist für uns mehr als nützlich. Wie bereits in der Einleitung gesehen, ist das Mengenkonzept überall vertreten, weshalb wir auch immer unbewusst die von mir behandelten Axiome verwenden und brauchen.

4. Literaturverzeichnis

Mein gesamter Vortrag und alle Informationen, insbesondere historische, beruhen auf folgender Literatur:

- *Primärliteratur*

  1 Ziegler, Martin: Mathematische Logik, Freiburg 2017 (2.Auflage). S.56-60.

- *Sekundärliteratur*

  2 Hoffmann, Dirk W.: Grenzen der Mathematik. Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik, Karlsruhe 2018 (3.Auflage). S.149-173.
  Hieraus stammen sämtliche Schaubilder.

  3 Russell, Bertrand: The principles of Mathematics, Cambridge 1903. §101. (http://fair-use.org/bertrand-russell/the-principles-of-mathematics/s101 , besucht November 2018)
  (Erklärung des Beweises in Abschnitt 2.2.2)

5. Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese vorliegende Ausarbeitung und den dazugehörigen Vortrag ohne Hilfe von Dritten und nur mit den von mir angegebenen Hilfsmitteln selbstständig verfasst habe. Alle von mir verwendeten Quellen wurden im Literaturverzeichnis genannt.

Sarah-Marie Grabeck, 21. Dezember 2018

Die Axiomatische Mengenlehre Teil II

Isabelle Jimenez Fabian

21.12.2018

1 Einleitung

Die moderne Mengenlehre ist durch einen formalen axiomatischen Aufbau von Ernst Zermelo und Abraham Fraenkel geprägt. Die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre (ZFC) ist die Grundlage der modernen Mathematik, denn alle Gegenstände der Mathematik sind Mengen oder auch Klassen von Mengen. Die ZFC hat ein logisches Fundament erschaffen um alle Begriffe und Konzepte der Mathematik zu erklären. Im ersten Teil der axiomatischen Mengenlehre wurde das Extensionalitätsaxiom, das Axiom der vollen Komprehension, das Aussonderungsaxiom, das Axiom der Paarmenge und das Axiom der Vereinigung behandelt. In den folgenden Abschnitten werden die restlichen Axiome (Axiom der Potenzmenge, Ersetzungsaxiom, Fundierungsaxiom, Unendlichkeitsaxiom, Auswahlaxiom), die die axiomatische Mengenlehre aufspannen, untersucht.

2 Das Potenzmengenaxiom

Das folgende Axiom beschreibt die **Existenz der Potenzmenge**:

$$\boxed{\forall y \exists x \forall z \quad z \in x \leftrightarrow z \subset y}$$

Die Menge aller Teilmengen ist somit existent und wird definiert als: $2^y = \{z | z \subset y\}$

Beispiel:

$$2^{\{1,2\}} = \{\{1,2\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\}$$

Mithilfe des Potenzmengenaxioms lässt sich die Existenz des Produktes von Mengen zeigen:

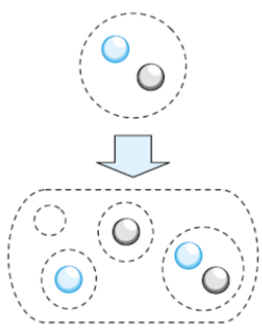


Abbildung 1: Axiom der Potenzmenge [1]

Lemma: *Aus den Axiomen von ZFC folgt für alle a und b die Existenz des direkten Produktes*

$$a \times b = \{(x, y) \mid x \in a \wedge y \in b\}$$

Beweis: Seien $x \in a$ und $y \in b$. Dann sind x und y Elemente der Vereinigung $a \cup b$. Daraus folgt, dass $\{x\}$ und $\{x, y\}$ Elemente von $2^{a \cup b}$ sind. Da $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ ist, ist die Menge $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ ein Element von $2^{2^{a \cup b}}$. Daraus folgt, dass $\{(x, y) \mid x \in a \wedge y \in b\}$ eine Teilklasse von $2^{2^{a \cup b}}$ ist. Da nach dem Aussonderungsaxiom eine Teilklasse einer Menge wiederum eine Menge ist, ist das direkte Produkt $a \times b$ eine Menge und somit existent.

Beispiel:

$$\{1, 2\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

Bemerkung: Definiere Tripel als:

$$(x, y, z) = ((x, y), z)$$

Weitere n-Tupel können analog definiert werden. *Beispiel:* Viertupel: $(x, y, z, w) = ((x, y, z), w) = (((x, y), z), w)$

Bemerkung:
(1) Relationen R sind Mengen von Paaren:

$$R \subset a \times b$$

(2) Der Definitionsbereich von R ist gegeben durch:

$$dom(R) = \{x \mid \exists y \quad (x, y) \in R\}$$

(3) Der Bildbereich von R ist definiert durch:

$$Im(R) = \{y \mid \exists x \quad (x, y) \in R\}$$

Doch sind der Definitionsbereich und der Bildbereich von R Mengen?
Sei das geordnete Paar $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \in R$ dann ist $\{x, y\}$ ein Element der Vereinigung $\cup R$. Und somit sind x und y Elemente von $\cup \cup R$. Da Definitionsbereich und Bildbereich von R also Teilklassen von $\cup \cup R$ sind, sind sie nach dem Aussonderungsaxiom wieder Mengen.

(4) Funktionen f können als rechtseindeutige Relationen definiert werden:

$$\forall x, y_1, y_2 \quad (x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \quad \rightarrow \quad y_1 = y_2$$

Da es also zu jedem $x \in a$ maximal ein $y \in b$ mit $(x, y) \in f$ gibt, ist die Relation f rechtseindeutig.

(5) Funktionen können mit ihrem Graphen identifiziert werden:

$$Graph(f) = \{(x, f(x)) \in dom(f) \times Im(f) \mid x \in dom(f)\}$$

Schreibweise: $f(x) = y$ für $(x, y) \in f$
$\longrightarrow$ Ist $x \notin dom(f)$,dann setzen wir $f(x) = \emptyset$
$\longrightarrow$ Die Schreibweise $f : a \longrightarrow b$ bedeutet: $dom(f) = a$ und $Im(f) \subset b$. Ist b nicht spezifiziert, dann schreiben wir: $f : a \longrightarrow V$

(6) Einschränkung von f auf c:

$$f|_c = f \cap (c \times b)$$

(7) Bildbereich von $f|_c$:

$$f[c] = \{f(x) \mid x \in c\}$$

3 Das Ersetzungsaxiom

$$\boxed{\underbrace{(\forall(a \in x)\exists! b\varphi(a, b))}_{\substack{\varphi \textit{ modelliert eine Funktion } f \\ \textit{,die jedem Element } a \in x \\ \textit{genau ein Bildelement } b \textit{ zuordnet}}} \longrightarrow \underbrace{(\exists y \forall b(b \in y \leftrightarrow \exists(a \in x)\varphi(a, b)))}_{y \textit{ ist das Bild von } x \textit{ unter } \varphi(a,b)}}$$

"Das Bild einer Funktion ist wieder eine Menge"

Das Ersetzungsaxiom sagt aus, dass für jede Funktion f, die mit einer Formel φ beschrieben werden kann und jede Menge $x = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ auch die Menge $y = \{f(x_1), f(x_2), f(x_3), ...\}$ existiert.

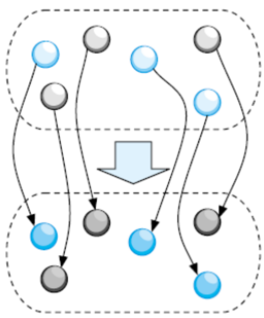


Abbildung 2: Ersetzungsaxiom [2]

Beispiel:
Die Existenz des direkten Produkts $a \times b$ kann auch ohne das Potenzmengenaxiom nur mit Hilfe des Ersetzungsaxioms hergeleitet werden:
Sei y fest. Dann existiert für alle $c \in b$ genau ein d, sodass $d \doteq (y, c)$. Nach dem Ersetzungsaxiom gibt es zu dieser Relation ein Bild von (y, c), wobei das Bild eine Menge ist. Dieses Bild ist gegeben durch: $\{(y, c) \mid y \in \{y\} \wedge c \in b\} = \{y\} \times b$. Wird das Ersetzungsaxiom darauf nochmal angewendet, d.h.nimmt man das Bild von $\{y\} \times b$, dann

ist dieses Bild eine Menge z, die gegeben ist durch: $\{\{y\} \times b \mid y \in a\} =: z$. Aus der Vereinigung aller dieser Mengen z folgt: $a \times b = \cup z$. Somit lässt sich die Existenz des direkten Produkts zweier Mengen auch mit Hilfe des Ersetzungsaxioms zeigen.

Bemerkung:
Die Existenz der inversen Relation $R^{-1} = \{(x, y) \mid (x, y) \in R\}$ lässt sich ebenfalls mit dem Ersetzungsaxiom zeigen.

Bemerkung(Eigenschaften von Funktionen):
Sei $f : a \longrightarrow b$ eine Funktion:
(1) Eine Funktion f heißt *surjektiv*, falls gilt: $Im(f) = \{y \mid \exists x\ (x, y) \in R\}$
(2) Eine Funktion f heißt *injektiv*, falls gilt: f^{-1} ist eine Funktion
(3) Eine Funktion f heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist

4 Das Fundierungsaxiom

Das Fundierungsaxiom erlaubt es Mengen explizit zu formulieren und dabei bestimmte Mengen , wie zum Beispiel Mengen, die sich selber enthalten, auszuschließen. Um das Fundierungsaxiom zu beschreiben, muss der Begriff der Fundiertheit zunächst definiert werden.

Definition (informell)
Eine Menge x heißt fundiert, wenn jede bei x anfangende $\in$-Kette

$$x \ni y_o \ni y_1 \ni ...$$

nach endlich vielen Schritten abbricht.

Das Fundierungsaxiom

$$\boxed{\forall x(\neg x \doteq \emptyset \longrightarrow \exists z \in x\ z \cap x \doteq \emptyset}$$

"Jede Menge ist fundiert"

Erfüllt x dieses Axiom nicht, dann besitzt jedes Element von x ein Element, welches wieder zu x gehört. Es gibt also eine unendliche $\in$-Kette von Elementen von x. Falls umgekehrt $y_0 \ni y_1 ...$ eine unendliche $\in$-Kette ist, wird das Fundierungsaxiom durch $x = \{y_0, y_1, ...\}$ verletzt.

Folgerung
Eine Menge kann sich nicht selbst als Element enthalten.

Beweis: Sei x_1 eine Menge mit $x_1 \in x_1$. Dann verstößt die Menge $x = \{x_1\}$ gegen das Axiom, da $x \cap x_1 = \{x_1\} \neq \emptyset$

Bemerkung
Mengen, die vom Fundierungsaxiom ausgeschlossen werden, sind:
(1) Mengen, die sich selbst enthalten (Selbstinklusion)
(2) Mengen, die in Form eines Rings aufgebaut sind (Ringinklusion)

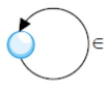


Abbildung 3: Selbstinklusion [3]

(3) Mengen, die unendlich absteigende Inklusionsketten besitzen (Unendlicher Abstieg)

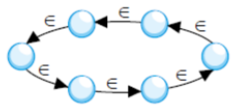


Abbildung 4: Ringinklusion [4]

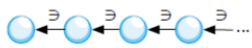


Abbildung 5: unendliche Kette [5]

Bemerkung
Man kann mit Hilfe der übrigen Axiome zeigen, dass es zu jeder Menge eine Bijektion mit einer fundierten Menge gibt. Das bedeutet fundierte Mengen genügen um Mathematik zu betreiben.

5 Das Unendlichkeitsaxiom

$$\boxed{\exists x \quad \underbrace{(\emptyset \in x}_{\substack{\text{die leere Menge}\\ \text{ist ein Element von } x}} \quad \wedge \quad \underbrace{\forall z \in x \; z \cup \{z\} \in x)}_{\substack{\text{fuer jedes } z \in x \text{ ist auch}\\ \text{die Menge } z \cup \{z\} \text{ in } x \text{ enthalten}}}}$$

"Es gibt eine Menge, die $\emptyset$ und alle Nachfolger enthält"

Das Axiom besagt, dass die Elemente $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, ...$ alle in x enthalten sind und gleichzeitig diese Eigenschaft von keiner endlichen Menge erfüllt werden kann.
Das Axiom beschreibt also die Existenz von Mengen mit unendlich vielen Elementen.

Beispiel:
Eine Menge, die die im Axiom geforderte Eigenschaft erfüllt, ist:

$$x = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, ...$$

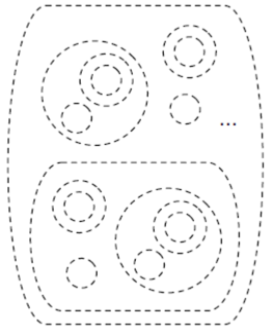


Abbildung 6: Axiom der Unendlichkeit [6]

6 Das Auswahlaxiom

$$\boxed{\forall x(\neg\emptyset \in x \longrightarrow \exists f : x \longrightarrow V\ \forall z \in x\ f(z) \in z)}$$

„ Zu jeder Menge von nichtleeren Mengen existiert eine Auswahlfunktion, also eine Funktion, die jeder dieser nichtleeren Mengen ein Element derselben zuordnet und somit auswählt."

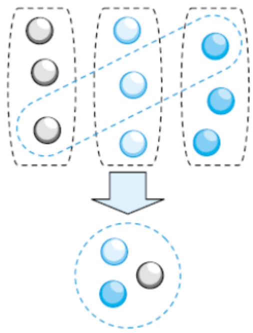


Abbildung 7: Axiom der Auswahl [7]

Dieses Axiom garantiert die Existenz einer Auswahlmenge, d.h. einer Menge, die aus jeweils einem Element einer anderen Menge besteht.

Das Auswahlaxiom spielt bei der Wohlordnung von Mengen eine große Rolle.

Literaturverzeichnis

Hoffmann,Dirk W. (2018): Grenzen der Mathematik - Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik, Springer Spektrum, Auflage 3, S.151 - 161

Ziegler, Martin (2017): Mathematische Logik, Birkhäuser, Auflage 2, S.61 - 66

o.V., Axiomatische Mengenlehre auf " Mathe für Nicht-Freaks", URL: `https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_fuer_Nicht-Freaks:_Axiomatische_Mengenlehre` (letzter Abruf: 19.12.2018)

[1] Entnommen aus: **Hoffmann,Dirk W.** (2018): Grenzen der Mathematik - Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik, Springer Spektrum, Auflage 3, S.157

[2] Entnommen aus: **Hoffmann,Dirk W.** (2018): Grenzen der Mathematik - Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik, Springer Spektrum, Auflage 3, S.157

[3] Entnommen aus: **Hoffmann,Dirk W.** (2018): Grenzen der Mathematik - Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik, Springer Spektrum, Auflage 3, S.159

[4] Entnommen aus: **Hoffmann,Dirk W.** (2018): Grenzen der Mathematik - Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik, Springer Spektrum, Auflage 3, S.159

[5] Entnommen aus: **Hoffmann,Dirk W.** (2018): Grenzen der Mathematik - Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik, Springer Spektrum, Auflage 3, S.159

[6] Entnommen aus: **Hoffmann,Dirk W.** (2018): Grenzen der Mathematik - Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik, Springer Spektrum, Auflage 3, S.156

[7] Entnommen aus: **Hoffmann,Dirk W.** (2018): Grenzen der Mathematik - Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik, Springer Spektrum, Auflage 3, S.160

Die Natürlichen Zahlen

Vortrag zum Proseminar *Grundlagen der Mathematik*
Tjard Sattler

Wintersemester 2018/19

1 Einleitung

$\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ werden aus $\mathbb{N}$ erzeugt, aber wie sind die natürlichen Zahlen selbst definiert? „Was man zählen kann“ ist eine schlechte Definition; sie ist generell kaum für die mathematische Arbeit geeignet und vor allem unexakt. Eine bessere Definition wollen wir nun finden.

Zuerst werden wir jede natürliche Zahl mit einer Menge identifizieren und verschiedene Eigenschaften dieser Darstellungsform zeigen. Mit Hilfe dieser Erkenntnisse können wir dann ganz formal die Menge der natürlichen Zahlen definieren – natürlich so, dass sie identisch zu unserer intuitiven Vorstellung natürlicher Zahlen ist. Zuletzt werden wir noch einige grundlegende Operationen auf den natürlichen Zahlen mengentheoretisch beschreiben.

2 Darstellung natürlicher Zahlen als Menge

Definition 1. *Definiere zu jeder natürlichen Zahl n eine sie repräsentierende Menge wie folgt:*

$$\underline{n} := \{\underline{0}, \underline{1}, \ldots, \underline{n-1}\}$$
$$\underline{0} := \emptyset$$

wobei man den Rekursionsanker in diesem Fall nicht explizit angeben muss, die erste Zeile der Definition würde also genügen.

Sieht man sich ein paar Beispiele an, so fällt auf, dass diese Menge naheliegender ist, als man zuerst denkt: $\underline{n}$ hat immer die Kardinalität n. Wir werden uns jetzt zuerst näher mit den Eigenschaften dieser Repräsentation von Zahlen beschäftigen um sie dann zur Definition der natürlichen Zahlen nutzen zu können.

Beispiel 1.

$$\begin{aligned}
&\underline{0} = \emptyset \\
&\underline{1} = \{\underline{0}\} = \{\emptyset\} \\
&\underline{2} = \{\underline{0}, \underline{1}\} = \{\emptyset, \{\underline{0}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
&\underline{3} = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\} = \{\emptyset, \{\underline{0}\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \{\underline{0}\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}
\end{aligned}$$

Definition 2. *Nachfolger von x:*

$$s(x) := x \cup \{x\}$$

Korollar 1. *ZFC* $\vdash \underline{n+1} = s(\underline{n})$

Beweis. $\underline{n+1} = \{\underline{0}, \underline{1}, \ldots, \underline{n}\} = \{\underline{0}, \underline{1}, \ldots, \underline{n-1}\} \cup \{\underline{n}\} = \underline{n} \cup \{\underline{n}\} = \mathrm{s}(\underline{n})$ □

Definition 3. *Lineare Ordnung*
Eine Relation $<$ auf a heißt lineare Ordnung, wenn gilt:

Irreflexivität: $\forall x \in a : \neg x < x \forall x \in a$
Transitivität: $\forall x, y, z \in a : x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$
Linearität: $\forall x, y \in a : x < y \vee x \doteq y \vee y < x$

Lemma 1. *$\in$ ist auf jeder Menge x, die aus beliebig häufiger Anwendung der Nachfolgeroperation auf $\emptyset$ ensteht, eine lineare Ordnung.*

Beweis. Irreflexivität gilt nach dem Fundierungsaxiom für alle Mengen.
Transitivität: Auf solchen Mangen gilt: $a \in b \in x \Rightarrow a \subseteq b \subseteq x$, folglich ist $\in$ genau dann transitiv auf x, wenn $\subseteq$ es ist. Dem ist so, denn nach Definition der Teilmenge gilt $a \subseteq b \subseteq c \Rightarrow a \subseteq c$
Linearität geht unter Verwendung der Transitivität direkt aus der Definition von x hervor.

□

Insbesondere ist jede Darstellung einer natürlichen Zahl wie in Definition 1 eine solche Menge.

Lemma 2. *Ist $m < n$, so gilt:*

$$ZFC \vdash \neg \underline{n} \doteq \underline{m}$$

Beweis. **IA:** Sei $m = 0$ und $n > m$. Dann ist $\emptyset \in \underline{n}$, aber $\underline{m} \doteq \emptyset \Rightarrow \mathrm{ZFC} \vdash \neg \emptyset \in \underline{m}$. Mit dem Fundierungsaxiom folgt dann $\neg \underline{n} \doteq \underline{m}$.
IV: Sei also für ein M: ZFC $\vdash \neg \underline{n} \doteq \underline{m}$ für alle $m \leq M$ und alle n.
IS: Sei $n > M+1$. Dann wissen wir aus Lemma 1, dass ZFC $\vdash \underline{n} \doteq s(\ldots s(\underline{M+1}) \ldots)$. Dank der Transitivität von $\in$ gilt daher ZFC $\vdash \underline{M+1} \in \underline{n}$. Die Ungleichheit folgt, da eine Menge sich nicht selbst enthalten darf. □

Lemma 3. *Für alle n, m gilt:*

$$m < n \Rightarrow ZFC \vdash \underline{m} \in \underline{n} \tag{1}$$
$$m \geq n \Rightarrow ZFC \vdash \neg \underline{m} \in \underline{n} \tag{2}$$

Beweis. Zeige zuerst (1): Gemäß Lemma 1 gilt ZFC $\vdash \underline{n} \dot{=} s(\dots s(\underline{m})\dots)$, also wegen der Transitivität von $\in$: ZFC $\vdash \underline{m} \in \underline{n}$
Zeige nun (2): <u>Fall 1:</u> $m = n \Rightarrow \underline{m} \dot{=} \underline{n} \Rightarrow$ ZFC $\vdash \neg \underline{m} \in \underline{m} \dot{=} \underline{n}$wegen der Irreflexivität.
<u>Fall 2:</u> $m > n \overset{(1)}{\Rightarrow}$ ZFC $\vdash \underline{n} \in \underline{m} \Rightarrow$ ZFC $\vdash z \in \underline{n} \in \underline{m} \to z \in \underline{m}$ wegen der Transitivität von $\in$.
Angenommen, es wäre $\underline{m} \in \underline{n}$, dass würde genau wie oben ZFC $\vdash z \in \underline{n} \in \underline{m} \to z \in \underline{m}$ gelten. Nach dem Fundierungsaxiom wäre dann $\underline{m} \dot{=} \underline{n}$; Widerspruch, denn eine Menge darf sich nicht selbst enthalten □

Mit diesen Aussagen fällt bereits auf, dass $\in$ auf zwischen unseren Mengen und $<$ auf den naiven natürlichen Zahlen einander sehr ähnlich sind.

3 Die Menge der natürlichen Zahlen

Eben haben wir gesehen, wie man eine natürliche Zahl durch eine Menge repräsentieren kann. Bisher wurde aber noch nicht festgelegt, was wir formal unter einer natürlichen Zahl verstehen wollen. Das passiert jetzt endlich. Danach werden wir verschiedene Eigenschaften der natürlichen Zahlen, insbesondere in ihrem Verhältnis zueinander, festlegen. Am Ende können wir dann erkennen, dass diese formale Definition mit der uns bisher bekannten, „intuitiven“ übereinstimmt.

Definition 4. *Transitivität von Mengen*
Eine Menge x nennt man transitiv, wenn gilt: $z \in y \in x \to z \in x$

Definition 5. *Natürliche Zahl*
x heißt natürliche Zahl, wenn gilt:
x ist transitiv.
$\in$ ist lineare Ordnung auf x.
Jede nichtleere Teilmenge von x hat je ein kleinstes und größtes Element bezüglich $\in$.

Die Klasse der natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit ω.

Lemma 4. *Sei $x \in \omega$ und $y \in x$ beliebig. Dann ist auch $y \in \omega$.*

Beweis. Transitivität von y: Wegen der Transitivität von x gilt: $a \in b \in c \in y \in x \Rightarrow a \in b \in c \in x \Rightarrow a \in c \in x$, also ist y transitiv.
$\in$ ist lineare Ordnung auf y: Wegen der Transitivität ist jedes Element von y auch Element von x. Wäre also $\in$ keine lineare Ordnung auf y, so würde es auch x nicht linear ordnen.

Existenz von kleinstem und größtem Element: Hätte y kein kleinstes (größtes) Element, so gäbe es für jedes $z \in y$ ein $\bar{z} \in y$, welches kleiner (größer) als z ist. Da ein kleineres (größeres) Element immer mindestens ein Element weniger (mehr) enthält, gibt es also beliebig kleine (große) Elemente in y. Folglich hat y ein kleinstes Element, denn einie Menge kann nicht weniger als 0 Elemente enthalten. Wegen der Transitivität gilt aber auch immer $\bar{z} \in x$ und x hat ein größtes Element nach Voraussetzung. Dessen Größe ist aber obere Schranke für die Größe von $\bar{z}$, also hat y auch ein größtes Element. □

Korollar 2. *$\underline{0}$ ist eine natürliche Zahl.*

Beweis. Da $\underline{0} = \emptyset$, existiert kein $z \in \underline{0}$, folglich sind die Bedingungen für Transitivität und lineare Ordnung direkt erfüllt. Auch hat $\underline{0}$ somit keine nichtleeren Teilmengen. □

Lemma 5. *Sei $x \in \omega$ natürliche Zahl. Dann ist auch $s(x) \in \omega$.*

Beweis. Es gilt $y \in \mathrm{s}(x) \Rightarrow y \in x \vee y \in \{x\} \Leftrightarrow y \in x \vee y \doteq x$.
$\mathrm{s}(x)$ ist transitiv: Es muss nur gezeigt werden, dass $y \in x \rightarrow y \in \mathrm{s}(x)$ gilt, der Rest folgt dann aus der Transitivität von x. Dies aber gilt bereits geäß der Definition des Nachfolgers und der Vereinigung.
$\in$ ist lineare Ordnung auf $\mathrm{s}(x)$: Irreflexitivität gilt nach dem Fundierungsaxiom, Transitivität wegen der Transitivität von $\mathrm{s}(x)$. Seien $y, z \in \mathrm{s}(x)$. Fall 1: $y, z \in x$; Linarität für x, y nach Voraussetzung erfüllt. Fall 2: $y \doteq x \doteq z \Rightarrow y \doteq z$. Fall 3: $y \in x = z \Rightarrow y \in z$
Die Existenz von kleinstem und größtem Element folgt aus der Existenz solcher Elemente für x, denn es ist ja nur ein neues Element hinzugekommen.
□

Jetzt wissen wir endlich, dass unsere eingangs definierte Menge „richtig“ gewählt war:

Korollar 3. *Jede Menge $\underline{n}$ wie in Definition 1 ist eine natürliche Zahl.*

Beweis. Aus Lemma 1 wissen wir, dass $\underline{n}$ durch n-fache Anwendung des Nachfolgeoperators auf $\emptyset$ gewonnen werden kann. Mit Korollar 2 und Lemma 5 folgt dann die Behauptung. □

Korollar 4. *Sei $x \neq \underline{0} \in \omega$. Dann existiert ein $y \in \omega$ mit $s(y) \doteq x$.*

Beweis. x ist nichtleere natürliche Zahl, hat also ein größtes Element y. Nach Definition eines größten Elements gilt dann: $x \doteq \{z | z \in y \vee z \doteq y\} \doteq y \cup \{y\} \doteq \mathrm{s}(y)$
□

Korollar 5. *Sei x natürliche Zahl. Dann kann x durch endlich viele Anwendungen des Nachfolgeoperators aus $\emptyset$ gewonnen werden.*

Beweis. Für $x \doteq \underline{0} \doteq \emptyset$ klar.
Ansonsten existiert nach Lemma 5 ein $y \in \omega$ mit $\mathrm{s}(y) \doteq x$. Man beachte, dass y genau ein Element (nämlich y) weniger enhält als x. Macht man diesen Schritt nun so oft, wie x Elemente enthält, dann erhält man $x \doteq s(\dots s(\underline{0}) \dots)$. Beachtet man, dass alle natürlichen Zahlen nur endlich viele Elemente enthalten, folgt die Behauptung. □

Aus den beiden letzten Korollaren geht hervor, dass die Definition vom Anfang genau alle natürlichen Zahlen beschreibt.

Lemma 6. *ω ist eine Menge.*

Beweis. Sei x Menge wie im Unendlichkeitsaxiom.
Zeige, dass $\omega \subseteq x$: Wäre dem nicht so, so wäre $\omega \backslash x \neq \emptyset$, wir könnten als $a \in \omega \backslash x$ wählen. Sei b das kleinste Element von $\mathrm{s}(a)$, welches nicht in x liegt (ein solches existiert, denn insbesondere ist $a \in \mathrm{s}(a)$ und $a \notin x$). $b \neq \emptyset$, denn sonst wäre $b \in x$, also existiert gemäß Korollar 4 ein $c \in \omega$ mit $\mathrm{s}(c) = b$. Dann ist aber $c \in b$ und somit (da b das <u>kleinste</u> Element in $\omega \setminus x$ ist) $c \in x$. Konstruktionsgemäß ist x bezüglich des Nachfolgeoperators abgeschlossen, also folgt daraus $b \in x$, Widerspruch.
Also ist ω als Teilmenge einer Menge (nämlich x) gemäß dem Aussonderungsaxiom auch eine Menge. □

Korollar 6. *Eine bezüglich der Nachfolgeoperation abgeschlossene Menge natürlicher Zahlen x, die $\underline{0}$ enthält, besteht aus allen natürlichen Zahlen.*

Beweis. Eine Menge, die $\emptyset$ enthält und bezüglich $\mathrm{s}(\cdot)$ abgeschlossen ist, ist gerade die Menge, deren Existenz im Unendlichkeitsaxiom postuliert wird. Aus dem Beweis von Lemma 6 wissen wir dann, dass $\omega \subseteq x$ gilt. Nach Voraussetzung ist zudem $x \subseteq \omega$, es folgt $x = \omega$. □

Für die $\in$-Relation auf ω schreiben wir $<$ – das verringert die Verwechslunggefahr it der $\in$-Relation auf einer natürlichen Zahl und wir werden gleich sehen, dass es sich zudem um eine sinnvolle Bezeichnung handelt.

Korollar 7. *Sein $n \in \omega$. Dann ist $s(n)$ der unmittelbare Nachfolger von n.*

Beweis. mit Widerspruch. Angenommen es gäbe ein $m \in \omega$ mit $n < m < \mathrm{s}(n) = n \cup \{n\}$. Wegen des Fundierungsaxioms ist $<$ irreflexiv, also $\neg n \doteq m$; gemäß der Definition natürlicher Zahlen ist dann $m \geq n \cup \{n\} = \mathrm{s}(n)$, Widerspruch zur Annahme. □

Lemma 7. *Alle natürlichen Zahlen sind bezüglich $<$ vergleichbar.*

Beweis. Sei $m \in \omega$ beliebig aber fest. Zeige nun mit Induktion, dass alle $n \in \omega$ mit m vergleichbar sind:
IA: Sei $n = \underline{0}$. Für $m = \underline{0}$ ist die Behauptung klar, andernfalls hat m als natürliche Zahl ein kleinstes Elemente m_0. Da Teilmengen natürlicher Zahlen auch Elemente sind, ist $m_0 = \underline{0}$ Also gilt $n = \underline{0} < m$ und die Vergleichbarkeit

ist gegeben.
IV: Seien also n und m vergleichbar für alle $n \leq N$.
IS: Fall 1: $m \leq N$. Dann gilt: $m \leq N < \mathrm{s}(N) \Rightarrow m < \mathrm{s}(N)$ wegen der Transitivität natürlicher Zahlen und die Vergleichbarkeit ist gegeben.
Fall 2: $m > N$. Sei n_0 der unmittelbare Nachfolger von n in der Ordnung von $\mathrm{s}(m)$. Gemäß Korollar 7 ist dann $n_0 = \mathrm{s}(n)$. Zugleich folgt aus der Nachfolgereigenschaft $n_0 = \mathrm{s}(n) \leq M$ und somit mit der Transitivität von $<$ auf $\mathrm{s}(m)$ die Behauptung. □

Korollar 8. *$<$ ist lineare Ordnung auf ω*

Beweis. Irreflexivität gilt gemäß dem Fundierungsaxiom.
Erinnert an sich daran, dass $<$ die $\in$-Relation auf ω bezeichnet, so folgt aus Lemma 7, dass jede endliche Menge natürlicher Zahlen eine Zahl (nämlich die größte) hat, welche alle anderen Zahlen als ihre Elemente hat. Die Transitivität von $<$ folgt dann aus der Transitivität von $\in$ auf dieser Zahl.
Linearität wurde eben in Lemma 7 gezeigt. □

Korollar 9. *Jede nichtleere Teilmenge von ω hat ein kleinstes Element.*

Beweis. Eine nichtleere Teilmenge von ω enthält mindestens eine natürliche Zahl x; eine solche ist entweder $\underline{0} = \emptyset$ oder es gilt $\emptyset \in x$. Wegen der Transitivität ist also die leere Menge Element jeder nichtleeren Teilmenge von ω; diese ist immer das kleinste Element □

Korollar 10. *Für alle $n \in \omega$ ist s(n) unmittelbarer Nachfolger von n.*

Beweis. Annahme: Es gäbe ein $m \in \omega$ mit $n < m < \mathrm{s}(n)$. Dann wäre $m \in n \cup \{n\}$, also $m \in n \vee m \doteq n$. Letzteres stände im Widerspruch zur Irreflexivität, Ersteres würde $n < m < n$, also wegen der Transitivität auch $n < n$ bedeuten, was ebenfalls im Widerspruch zur Irreflexivität steht. □

Korollar 11. *Alle natürlichen Zahlen größer $\underline{0}$ haben einen unmittelbaren Vorgänger.*

Beweis. Sei $x \in \omega, x \neq \underline{0}$. Nach obigem existiert dann ein $y \in \omega$ mit $x = \mathrm{s}(y)$. Da wir schon gezeigt, haben, dass x dann unmittelbarer Nachfolger von y ist, ist natürlich auch y unmittelbarer Vorgänger von x. □

4 Anwendung

Hier deuten wir kurz an, wie die auf diese Weise definierten natürlichen Zahlen auf die uns bekannte Weise mit Rechenoperationen „nutzbar“ gemacht werden können.

Satz 1. *Sei $g : A \to B$ und $h : A \times \omega \times B \to B$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Funktion $f : A \times \omega \to B$ mit*

$$
\begin{aligned}
f(a, \underline{0}) &= g(a) \\
f(a, s(n) &= h(a, n, f(a, n))
\end{aligned}
$$

für alle $a \in A$ und $n \in \omega$.

Beweis. Sei $a \in A$ beliebig, aber fest. Dann sei $f_a : \mathrm{s}(m) \to B$ Funktion, für die gilt:

$$
\begin{aligned}
f_a(\underline{0}) &= g(a) \\
f_a(\mathrm{s}(n)) &= h(a, n, f_a(n) \forall n < m
\end{aligned}
$$

Zeige die Existenz und Eindeutigkeit dieser Funktion durch Induktion über m:
IA: $f_a : \mathrm{s}(\underline{0}) = \{\emptyset\} \to B; \emptyset \mapsto g(a)$ ist die eindeutige Funktion, die diese Bedingung erfüllt.
IV: Sei also f_a wie oben eindeutig definiert für alle Paramteter kleiner oder gleich m.
IS: Gemäß der Induktionsvoraussetzung existiert dann für alle Parameter außer $\{m\}$ ein eindeutig bestimmter Wert von f_a, sodass obige Bedingungen erfüllt sind. Für $f_a(\{m\})$ soll gelten: $f_a(\{m\}) = f_a(\mathrm{s}(m-1)) \overset{!}{=} h(a, m-1, f_a(m-1)$. Da h sowie nach IV auch $f_a(m-1)$ eindeutig definiert ist, ist auch $f_a(\{m\})$ eindeutig.
Definiere schließlich$f(a, m) := \{b \in B | \exists f_a \text{ mit } f_a(m) = b\}$. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit der Werte aller f_a. $\square$

Nur dank dieses Satzes können wir uns durch Angabe enstprechender Funktionen h und g versichern, dass die im folgenden definierten Funktionen wohldefiniert (und überhaupt widerspruchsfrei definiert) sind.

Definition 6. *Addition:*

$$
\begin{aligned}
+ : \omega \times \omega \to \omega \ &\mathit{mit} \\
a + \underline{0} &= a \\
a + s(n) &= s(a + n)
\end{aligned}
$$

Lemma 8. *Die Addition ist kommutativ.*

Auf ähnliche Weise lassen sich auch Assoziativität etc. zeigen, da dies aber wenig interessant ist, wird an dieser Stelle darauf verzichtet.

Definition 7. *Multiplikation:*

$$
\begin{aligned}
\cdot : \omega \times \omega \to \omega \ &\mathit{mit} \\
a \cdot \underline{0} &= \underline{0} \\
a \cdot s(n) &= (a \cdot n) + a
\end{aligned}
$$

Proseminar: Mathematische Logik
Kapitel 10: Ordinalzahlen

Alexandra Keuth
Dozent: Prof. Dr. Christoph Thäle

Vortrag: 21.12.18

10 Ordinalzahlen

Definition 1

Eine **Ordinalzahl** ist eine transitive Menge, die durch die Relation $\in$ linear geordnet wird.

Definition 2

Eine **Klasse** A ist ein System $\{x \mid \varphi(x, \bar{a})\}$ von Mengen, die eine Formel $\varphi(x, \bar{a})$ mit festgehaltenen Parametern $\bar{a} = a_1, ..., a_n$, erfüllt.

Beispiele:

Alle natürlichen Zahlen sind Ordinalzahlen.
$0 = \emptyset$
$1 = \{0\} = \{\emptyset\}$
$2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
Außerdem ist ω eine Ordinalzahl. Wir bezeichnen mit On die Klasse der Ordinalzahlen.

Erinnerung:

$x, y \in$ Z, Z Menge.
Z linear geordnet durch die Relation R $\Leftrightarrow \forall x, y \in Z : xRy$

Lemma 1

1. On wird durch die Relation $\in$ linear geordnet. (Diese Ordnung wird auch $<$ genannt.)
2. Jede nicht-leere Teilklasse von On hat ein minimales Element.
3. Jede Ordinalzahl α ist die Menge ihrer Vorgänger:

$$\alpha \;=\; \{\beta \in On \mid \beta < \alpha\}$$

Anmerkung:
Ein echtes Anfangsstück S von einer Menge M ist definiert durch:
$(y \in S) \wedge (x < y) \rightarrow x \in S$

Beweis:

1. Sei S $\subsetneq \alpha$ ein echtes Anfangsstück von α und sei $\beta \in \alpha$ das kleinste Element von $\alpha \setminus$ S. Daraus folgt, dass $\beta =$ S ist.
   Seien α und β zwei Ordinalzahlen und ist S $= \alpha \cap \beta$ ein Anfangsstück von α und β. Aus diesem Grund muss (S $= \alpha$) $\vee$ (S $= \beta$) sein. Denn wenn $\alpha \neq S \neq \beta$ wäre, so muss S$<$ $(\alpha \cap \beta)$ sein, was ein Widerspruch zur obigen Annahme ist. Wenn S $= \alpha$, so ist $\alpha \leq \beta$, und, wenn S $= \beta$, so ist

$\beta \leq \alpha$. Hieraus folgt, dass alle Ordinalzahlen vergleichbar sind. Wie im Kapitel über die natürlichen Zahlen folgt, dass die Relation $\in$ die Klasse aller Ordinalzahlen linear ordnet.

2. Dass jede nicht-leere Teilklasse von On ein minimales Element hat, folgt aus dem Fundierungsaxiom.

3. Es bedeutet, dass Ordinalzahlen aus Ordinalzahlen bestehen. Sei α eine Ordinalzahl und β ein Element von α. Dann ordnet die Relation $\in \beta$ ebenfalls linear, und jede nicht-leere Teilmenge von β hat bezüglich $\in$ ein kleinstes Element und ein größtes Element. Zu zeigen bleibt, dass β transitiv ist, dies folgt aber aus der Transitivität von $\in$ auf α. □

Bemerkung 1

On ist keine Menge.

Beweis:

Nehmen wir an, dass On eine Menge ist, dann ist On eine Menge, bei der jedes Element eine transitive Menge ist. Aus der Definition folgt dann, dass On selbst eine Ordinalzahl sein müsste. Da On alle Ordinalzahlen enthält, müsste es auch sich selbst enthalten, was ein Widerspruch zu Lemma 1 3. ist. □

Aus 2. folgt ein Induktionsprinzip: Eine Teilklasse U von On enthält alle Ordinalzahlen, wenn für alle α gilt.

$$\alpha \subset U \to \alpha \in U$$

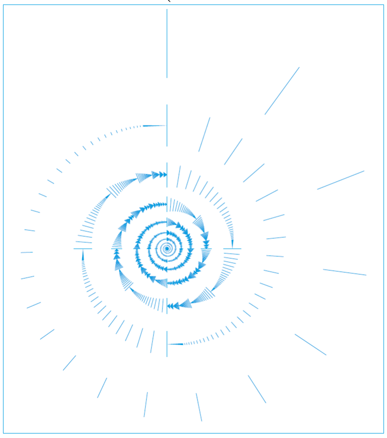
Folgerung 1: Trichotomiesatz

Seien α und β zwei Ordinalzahlen, dann gilt:
$\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$ oder $\beta \in \alpha$

Definition 3

Eine Ordinalzahl der Form $s(\alpha)$ heißt **Nachfolgerzahl**. Man schreibt auch $\alpha + 1$ für den Nachfolger von α.
Eine Ordinalzahl $> \underline{0}$, die keine Nachfolgerzahl ist, heißt **Limeszahl**.

Beispiele:
Nachfolger: $\alpha = 5 = \{1,2,3,4\} \Rightarrow\ S(\alpha) = \alpha + 1 = 6 = \{1,2,3,4,5\}$
Limeszahl: ω (die Klasse der natürlichen Zahlen)



Definition 4

Ein **Funktional** $F : A \rightarrow V$ ist eine funktionale Klasse aus $A \times V$. Es ist also $\forall x \in A\ \exists! y : (x, y) \in F$.

Satz 1: Rekursionssatz

Zu jedem Fuktional $G : V \rightarrow V$ kann man ein Funktional $F : On \rightarrow V$ angeben, sodasss für alle $\alpha \in On$

$$F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha).$$

Beweis durch transfinite Induktion:

Wir zeigen zuerst, dass es für alle β genau eine Funktion $f : \beta \rightarrow V$ gibt, die für alle $\alpha \in \beta$ die Rekursiongleichung erfüllt.
Zuerst die Eindeutigkeit: Wenn es ein anderes $f' : \beta \rightarrow V$ gibt, gibt es ein kleinstes $\alpha < \beta$ mit $f(\alpha) \neq f'(\alpha)$. Aus $f \upharpoonright \alpha = f' \upharpoonright \alpha$ folgt aber $f(\alpha) = f'(\alpha)$.
Wir zeigen die Existenz durch Induktion über β. Nehmen wir also an, dass die Behauptung schon für alle $\beta' < \beta$ gezeigt ist. Es gibt drei Fälle:
1. $\beta = \underline{0}$. Wir setzen $f = \emptyset$
2. $\beta = \beta' + 1$. Wir wählen ein $f' : \beta' \rightarrow V$, das die Rekursionsgleichung erfüllt und setzen $f = f' \cup \{(\beta', G(f'))\}$.
3. β ist eine Limeszahl. Nach dem Ersetzungsaxiom ist

$$X = \{f' : \beta' \rightarrow V \mid \beta' < \beta,\ f' \text{ erfüllt die Rekursionsgleichung}\}$$

eine Menge, weil die Funktionen f' eindeutig durch β' bestimmt sind. Aus demselben Grund ist $f = \bigcup X$ eine Funktion.
Schließlich setzen wir

$$F = \bigcup\{f : \beta \rightarrow V \mid \beta \in On,\ f \text{ erfüllt die Rekursionsgleichung}\}. \qquad \square$$

Ähnlich definieren wir V die $von\ Neumann-Hierarchie$:

$$\begin{aligned} V_{\underline{0}} &= \emptyset \\ V_{\alpha+1} &= \mathfrak{P}(V_\alpha) \\ V_\lambda &= \bigcup_{\alpha<\lambda}, \ \lambda \text{ Limeszahl,} \end{aligned}$$

Man zeigt leicht, dass

$$V = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$$

denn $V = V_{On}$ und On kann in die 0, Nachfolgerzahlen und Limeszahlen aufgeteilt werden. Man kann V also schreiben als
$V_{\underline{0}} \cup (\bigcup_\alpha V_{\alpha+1}) \cup V_\lambda \Rightarrow V = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$
V_ω besteht aus den $erblich\ endlichen\ Mengen$, d.h.:

Definition 5

Eine Menge heißt **erblich endlich**, wenn sie in einer endlichen transitiven Menge enthalten ist.

Definition 6

Zwei Ordnungen sind **ordnungsisomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung gibt, die ordnungstreu ist, das heißt:

$$x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$$

Zwei Mengen sind demnach ordnungsisomorph, wenn ihre Elemente die gleiche Ordnungstruktur haben und gleichmächtig sind.

Lemma 2

Jede Wohlordung (wohlgeordnete Menge) ist zu genau einer Ordinalzahl (ordnungs-)isomorph.

Beweis:

Sei $(a, <)$ eine Wohlordnung. Wir suchen eine Ordinalzahl α und eine Bijektion $f : \alpha \rightarrow a$, die ordnungstreu ist. Sei $*$ eine Menge, die nicht zu a gehört. Wir definieren

$$F : On \rightarrow a \cup \{*\}$$

durch

$$F(\beta) = \begin{cases} min(a \setminus F[\beta])\ wenn\ a \not\subset F[\beta] \\ *\ sonst \end{cases}$$

$*$ muss im Bild von F vorkommen, damit F keine ordnungstreue Abbildung ist. Denn wenn F ordnungstreu wäre, so folgt daraus, dass F injektiv wäre und somit $F^{-1}[a] = On$ eine Menge. Dies ist nach der Bemerkung 1 nicht der Fall.

Sei α die kleinste Ordinalzahl, für die $F(\alpha) = *$ gilt. Dann ist $f = F \upharpoonright \alpha$ der gesuchte Isomorphismus zwischen Wohlordnung und Ordinalzahl.
α ist eindeutig bestimmt. Denn sei $f' : \alpha' \to a$ ein zweiter Isomorphismus, dann erfüllt $F' = f' \cup \{(\beta, *) \mid \alpha' \leq \beta\}$ die gleiche Rekursionsgleichung, und es folgt $F' = F$ und $\alpha' = \alpha$. $\square$

Beispiele:

1. Sei $(\mathbb{N}_0, <)$ gegeben, dann ist diese Wohlordung zu ω isomorph.
2. Sei $(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, <)$ gegeben, dann ist diese Wohlordung zu $\alpha = 6$ isomorph.

Aus dem Beweis folgt, dass nicht nur α, sondern auch der Isomorphismus zwischen a und α eindeutig ist.

Definition 7

Eine Funktion $f : x \to V$ mit $f(z) \in z$ für alle $z \in x$ heißt **Auswahlfunktion**.

Für eine nicht-leere Menge mit Wohlordnung existiert die Auswahlfunktion $f(z) = min(z)\ \forall z \in x$. Dies gilt ohne, dass man das Auswahlaxiom annehmen muss. Umgekehrt folgt aus dem Auswahlaxiom der folgende Satz:

Satz 2: Wohlordnungssatz

Jede Menge hat eine Wohlordnung.

Beweis:

Sei a eine Menge und $* \notin a$. Man erhält eine Auswahlfunktion $g : \mathfrak{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to a$.
Definiere

$$F(\beta) = \begin{cases} g(a \setminus F[\beta]) \; wenn \; a \not\subset F[\beta] \\ * \; sonst \end{cases}$$

wie im Beispiel von Lemma 2 sieht man, dass es ein α gibt, für das $f = F \upharpoonright \alpha$ eine Bijektion zwischen α und a ist. Diese Bijektion transportiert die Wohlordnung von α auf a: Wir setzen

$x < y \Leftrightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$. $\square$

Aus dem Auswahlaxiom folgt auch das $Zornsche Lemma$, das wie der Wohlordnungssatz zum Auswahlaxiom äquivalent ist.

Definition 8

Eine **(echte) obere Schranke** von K ist ein Element s mit $a \leq s$ $(a < s)$ für alle $a \in$ K.
Ein Element m heißt **maximales Element** von A, wenn A kein Element enthält, das größer als m ist.

Satz 3: Zornsches Lemma

Sei $(a, <)$ eine partielle Ordnung, in der jede linear geordnete Teilmenge K eine obere Schranke s besitzt. Dann besitzt A ein maximales Element m.

Beweis:

Das Auswahlaxiom liefert uns ein Funktional G, das jeder Teilmenge von A, die eine echte obere Schranke zuordnet und das sonst den Wert $*$ hat. Wir definieren

$$F : On \to A \cup \{*\}$$

durch

$$F(\beta) = G(F[\beta]).$$

Wenn F den Wert $*$ nicht annehmen würde, wäre F eine ordnungstreue Abbildung von On nach A, was nicht geht. Sei α minimal mit $F(\alpha) = *$. Dann ist $K = F[\alpha]$ eine linear geordnete Teilmenge von A, die keine echte obere Schranke hat. Sei m eine obere Schranke (und damit größtes Element) von K. Dann ist m maximal in A. □

Beispiele:

Sei $A = \{0, 1, 2\}$ und $(A, <)$ eine partielle Ordnung, dann sind
$K_1 = \{0, 1\},\ K_2 = \{0, 2\},\ K_3 = \{1, 2\}$
die geordneten Teilmengen.
Die obere Schranke von K_1 ist 1.
Die obere Schranke von K_2 ist 2.
Die obere Schranke von K_3 ist 2.
Hieraus folgt, dass a ein maximales Element hat, dieses ist die 2.

Quellen:

Es wurden die Bücher:
(1) Mathematische Logik von Martin Ziegler
2. Auflage, Birkhäuser 2017
(2) Grenzen der Mathematik von Dirk Hoffmann
3. Auflage, Springer 2018

Ordinal- und Kardinalzahlen Teil 2

Jana Beste

21.Dezember 2018

Definition 1

1. Zwei Mengen a und b heißen *gleichmächtig* ($a \sim b$), wenn es eine Bijektion zwischen a und b gibt.
2. Mit der Schreibweise $a \preceq b$ drücken wir aus, dass es eine Injektion $f : a \to b$ gibt.
3. $a \preceq b$ bedeutet, dass a *gleichmächtig* zu einer Teilmenge von b ist.
4. Man überlegt leicht, dass $a \preceq b$ genau dann gilt, wenn a leer ist oder wenn es eine surjektive Abbildung von b nach a gibt.
5. Aus dem Wohlordnungssatz folgt, dass jede Menge gleichmächtig zu einer Ordinalzahl ist.

Definition 2 (Mächtigkeit)

Die *Mächtigkeit* $|a|$ einer Menge a ist die kleinste Ordinalzahl, die gleichmächtig zu a ist:

$$|a| = min\{\alpha \in On | \alpha \sim a\}.$$

Lemma 10.3

Seien a und b Mengen. Dann gilt

$$a \sim b \Leftrightarrow |a| = |b|, \tag{1}$$
$$a \preceq b \Leftrightarrow |a| \leq |b|. \tag{2}$$

Beweis (Lemma 10.3)

(1) Aus $\sim$ ist Äquivalenzrelation folgt: $a \sim b \Leftrightarrow |a| = |b|$.

(2) " $\Leftarrow$ " z.z. $a \preceq b$.

Sei $|a| \leq |b|$ und seien α und β die zugehörigen Ordinalzahlen

$(|a| = \alpha, |b| = \beta)$.

Dann gilt $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \subset \beta$ (★).

Gesucht: Injektion von $f : a \to b$.

1. $\exists\ g : a \to |a| = \alpha$ bijektiv.
2. Durch (★) existiert Injektion $h : |a| = \alpha \to |b| = \beta$.
3. $\exists\ j : |b| = \beta \to b$ bijektiv.

$\Rightarrow f : a \to b = (j \circ h \circ g)$ injektiv.

Hilfssatz 10.4

Sei α eine Ordinalzahl und S eine Teilmenge von α. Dann ist der Ordnungstyp von S (mit der induzierten Wohlordnung) nicht größer als α.

Beweis

Siehe Buch (1) S.78.

Beweis (Lemma 10.3)

(2) " $\Rightarrow$ " z.z. $|a| \leq |b|$.

Sei $a \preceq b$, d.h. es existiert eine Injektion $f : a \to b$ (★).

1. $\exists\ g : |a| \to a$ bijektiv.
2. Durch (★) existiert Injektion $f : a \to b$.
3. $\exists\ j : b \to |b| = \beta$ bijektiv.

4. Sei $|a| := S \subseteq |b| \Rightarrow S \subseteq \beta\ (mit Hilfssatz) \Rightarrow \gamma\ (Repräsentant\ von\ Ordnungstyp\ von\ S)$

$\leq \beta = |b| \Rightarrow |a| \leq |b|$.

Definition 3 (Kardinalzahl)

Eine Ordinalzahl α heißt *Kardinalzahl*, wenn gilt

$$\beta < \alpha \Rightarrow |\beta| < |\alpha|.$$

Definition 4 (Kardinalzahl)

Wir nennen α eine *Kardinalzahl*, wenn $\alpha = |\alpha|$.
Die Mächtigkeit einer Menge ist immer eine Kardinalzahl.

Lemma

Alle natürlichen Zahlen und ω sind Kardinalzahlen.

Beweis

Siehe Buch (1) S.78.

Definition 5 (endlich/abzählbar)

Eine Menge a heißt *endlich*, wenn $|a| < \omega$. Wenn $|a| = \omega$, heißt a *abzählbar*.

Satz (Cantor (1845-1918))

Sei a eine Menge und $\mathcal{P}(a)$ die zugehörige Potenzmenge.
Dann gilt:

$$|a| < |\mathcal{P}(a)|.$$

Beweis (Satz Cantor)

Zwei Mengen a und b heißen gleichmächtig ($|a|$=$|b|$), wenn es eine Bijektion zwischen a und b gibt.

Es gilt $|a| < |b|$, falls es keine surjektive Abbildung $f : a \to b$ gibt.

Annahme: Es existiert eine surjektive Abbildung $f : a \to \mathcal{P}(a)$.

Zeichnung:

Wieso liegt $b = \{x \in a \mid x \notin f(x)\}$ nicht im Bild von f?

Annahme: b liegt im Bild von f.

Dann existiert $y \in a$ mit $f(y) = b = \{x \in a \mid x \notin f(x)\}$.

1.Fall: $y \in f(y) \Rightarrow y \notin b$ **Widerspruch!** $\lightning$

2.Fall: $y \notin f(y) \Rightarrow y \in b$ **Widerspruch!** $\lightning$

$\Rightarrow f$ ist nicht surjektiv.
$\Rightarrow |a| < |\mathcal{P}(a)|$.

Definition 6 (Nachfolgerkardinalzahl/ Kontinuumshypothese)

Es folgt, dass es keine größte Kardinalzahl gibt. Man bezeichnet mit κ^+ die kleinste Kardinalzahl, die größer als κ ist - die *Nachfolgerkardinalzahl* von κ. Es ist

$$\omega^+ \leq |\mathcal{P}(\omega)|.$$

Die Aussage

$$\omega^+ = |\mathcal{P}(\omega)|$$

ist die *Kontinuumshypothese*(CH). Wenn ZFC widerspruchsfrei ist, kann CH weder bewiesen noch widerlegt werden.

Man zeigt leicht durch Induktion, dass für disjunkte endliche Mengen a und b

$$|a \cup b| = |a| + |b|.$$

Daraus folgt (wiederum durch Induktion), dass

$$|m \times n| = m \cdot n$$

für alle $m, n \in \omega$.

Satz

Wenn a unendlich ist, ist

$$|a \times a| = |a|.$$

Beweis

Beweis für abzählbare a siehe Buch (1) S.79.

Literatur

(1) Mathematische Logik von Martin Ziegler (2. Auflage, Birkhäuser 2017, elektrinoscher Zugriff über https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-319-44180-1).

(2) Grenzen der Mathematik von Dirk Hoffmann (3. Auflage, Springer 2018, elektronischer Zugriff über https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-662-56617-6).

Gödelscher Unvollständigkeitssatz in ZFC

Matthias Heinzer Yasin Sahingöz

Gödelscher Unvollständigkeitssatz in ZFC

Matthias Heinzer
Yasin Sahingöz

Ruhr-Universität-Bochum

20. Dezember 2018

Inhalt

Historische Einführung

David Hilbert:

- Versuch der Axiomatisierung bzw. Beweis der Widerspruchsfreiheit der gesamten Mathematik (Hilbert-Programm)

Kurt Gödel:

- Mathematiker, Philosoph und einer der bedeutendsten Logiker des 20. Jahrhunderts
- hauptsächlicher Aufgabenbereich: mathematische Logik, insbesondere Prädikatenlogik, Vollständigkeit und Entscheidungsprobleme in Arithmetik und axiomatischer Mengenlehre
- beendete Hilbert's Traum der widerspruchsfreien Mathematik
- UV-Sätze setzen Grenzen für Computerprogramme

Grundbegriffe

- **ZFC**

  Zermelo-**F**raenkel-**M**engenlehre **mit Auswahlaxiom**. ZFC ist ein sehr bewährter und weithin akzeptierter Rahmen für die gesamte Mathematik, da sich gezeigt hat, dass sich *so gut wie alle* mathematischen Aussagen so formulieren lassen, dass sich beweisbare Aussagen aus ZFC ableiten lassen.

- **Auswahlaxiom**

  A ist eine Menge von paarweise disjunkten, nichtleeren Mengen. Dann existiert eine Menge, die genau ein Element aus jedem Element aus A enthält.

- **Konsistenz (Widerspruchsfreiheit)(System T)**

  Es gibt Beweis für $A \Rightarrow$ Es gibt *keinen* Beweis für $\neg A$

Grundbegriffe

- **Inkonsistenz**

  Sei A eine Aussage. Es gibt einen Beweis für A *und* einen für $\neg$ A.

- **ω-Inkonsistenz**

  Keine direkte Inkonsistenz, sondern gewissermaßen eine Inkonsistenz im Unendlichen.
  Die Aussage lässt sich für **alle n**, aber auch für **nicht alle n** beweisen:

  ω eliminiert.

- **Vollständigkeit (System T)**

  Es gibt keinen Beweis für A $\Rightarrow$ Es gibt Beweis für $\neg$A.

Grundbegriffe

- **Unvollständigkeit**

  Es gibt keinen Beweis für A und keinen Beweis für $\neg A$.

- **$\ulcorner \psi \urcorner$-Konstante (Gödelnummer von ψ)**

  Z.B. natürliche Zahl, die einem Wort einer formalen Sprache nach bestimmten Verfahren zugeordnet wird und dieses eindeutig kennzeichnet.

- **Formales System**

  In einem formalen System lassen sich mathematische Aussagen beweisen. Es besteht aus einer formalen Sprache, einer Menge von Axiomen und einer Menge von Schlussregeln (z.B.: aus $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow C$ folgt $A \Rightarrow C$), mit denen aus bereits bewiesenen Aussagen neue Aussagen hergeleitet werden können.

Grundbegriffe

- **Hinreichend mächtiges System**

  Ein System, das die Bernays-Löb-Axiome erfüllt + der Meta-Satz *Jedes hinreichend mächtige, rekursiv aufzählbare formale System ist entweder widersprüchlich oder unvollständig* muss innerhalb des Systems darstellbar sein

- **Math. Theorie**

  Menge aller im System herleitbaren Aussagen

Formulierung der Sätze in Worten

1. Unvollständigkeitssatz

Jedes hinreichend mächtige, rekursiv aufzählbare formale System ist entweder widersprüchlich oder unvollständig.

2. Unvollständigkeitssatz

Jedes hinreichend mächtige konsistente formale System kann die eigene Konsistenz nicht beweisen.

Lügnerparadoxon

Ein Lügner-Paradoxon ist in der Logik ein Paradoxon, das entsteht, wenn ein Satz seine eigene Falschheit (bzw. Unwahrheit) behauptet.

Das einfachste Beispiel eines Lügner-Paradoxons ist der folgende selbstbezügliche Satz:

Lügnerparadoxon

Ein Lügner-Paradoxon ist in der Logik ein Paradoxon, das entsteht, wenn ein Satz seine eigene Falschheit (bzw. Unwahrheit) behauptet.

Das einfachste Beispiel eines Lügner-Paradoxons ist der folgende selbstbezügliche Satz:

"Dieser Satz ist falsch."

Lügnerparadoxon

Ein Lügner-Paradoxon ist in der Logik ein Paradoxon, das entsteht, wenn ein Satz seine eigene Falschheit (bzw. Unwahrheit) behauptet.

Das einfachste Beispiel eines Lügner-Paradoxons ist der folgende selbstbezügliche Satz:

"Dieser Satz ist falsch."

Gödel's Idee:

Lügnerparadoxon

Ein Lügner-Paradoxon ist in der Logik ein Paradoxon, das entsteht, wenn ein Satz seine eigene Falschheit (bzw. Unwahrheit) behauptet.

Das einfachste Beispiel eines Lügner-Paradoxons ist der folgende selbstbezügliche Satz:

"Dieser Satz ist falsch."

Gödel's Idee:

Aussage ϕ: "Ich bin nicht ableitbar."

Beweisidee

Idee: 1. Satz

1. Schritt: Gödelisierung

Idee: 1. Satz

1. Schritt: Gödelisierung

z.B.

Idee: 1. Satz

1. Schritt: Gödelisierung

z.B.
Aussage 1: "$1 + 1 = 2$"

Idee: 1. Satz

1. Schritt: Gödelisierung

z.B.

Aussage 1: "$1 + 1 = 2$"
Aussage 2: "$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$"

Idee: 1. Satz

1. Schritt: Gödelisierung

z.B.

Aussage 1: "$1 + 1 = 2$"
Aussage 2: "$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$"
...

Idee: 1. Satz

1. Schritt: Gödelisierung

z.B.
Aussage 1: "$1 + 1 = 2$"
Aussage 2: "$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$"
...
Aussage 34: "$2 + 3 = 6$"

Idee: 1. Satz

1. Schritt: Gödelisierung

z.B.

Aussage 1: "$1 + 1 = 2$"
Aussage 2: "$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$"
...
Aussage 34: "$2 + 3 = 6$"
Aussage 35: "Die Aussage mit der Nummer 34 ist falsch"

Idee: 1. Satz

1. Schritt: Gödelisierung

z.B.
Aussage 1: "$1 + 1 = 2$"
Aussage 2: "$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$"
...
Aussage 34: "$2 + 3 = 6$"
Aussage 35: “Die Aussage mit der Nummer 34 ist falsch”

Wir nehmen nun folgende Aussage:

“Die Aussage mit der Nummer x ist nicht ableitbar.”

Beweisidee

2. Schritt: Diagonalisierung

Wir wollen eine Aussage, die ihre eigene Unbeweisbarkeit behauptet.
Hierzu lässt sich das **Diagonallemma** anwenden.
Es besagt, dass es in der Arithmetik und stärkeren formalen Systemen für jede Formel F(x) mit freier Variable x eine Aussage ϕ gibt.

Beweisidee

2. Schritt: Diagonalisierung

Wir wollen eine Aussage, die ihre eigene Unbeweisbarkeit behauptet.
Hierzu lässt sich das **Diagonallemma** anwenden.
Es besagt, dass es in der Arithmetik und stärkeren formalen Systemen für jede Formel F(x) mit freier Variable x eine Aussage ϕ gibt.

So gibt es eine Einsetzung ϕ für x, sodass der Satz mit der Nummer ϕ äquivalent ist zur Aussage:

"Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar."

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage ϕ ist ableitbar

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage ϕ ist ableitbar $\Leftrightarrow$ Aussage $\neg A$

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage ϕ ist ableitbar $\Leftrightarrow$ Aussage $\neg A$ Widerspruch!

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage ¬A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage ϕ ist ableitbar $\Leftrightarrow$ Aussage $\neg A$ Widerspruch!

Ang. Aussage $\neg A$ **ist ableitbar**

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage ϕ ist ableitbar $\Leftrightarrow$ Aussage $\neg A$ Widerspruch!

Ang. Aussage $\neg A$ **ist ableitbar**

$\Leftrightarrow$ Aussage ϕ

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage ϕ ist ableitbar $\Leftrightarrow$ Aussage $\neg A$ Widerspruch!

Ang. Aussage $\neg A$ **ist ableitbar**

$\Leftrightarrow$ Aussage ϕ

wegen Stärke des Systems

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage ϕ ist ableitbar $\Leftrightarrow$ Aussage $\neg A$ Widerspruch!

Ang. Aussage $\neg A$ **ist ableitbar**

$\Leftrightarrow$ Aussage ϕ

wegen Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage A

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage ϕ ist ableitbar $\Leftrightarrow$ Aussage $\neg A$ Widerspruch!

Ang. Aussage $\neg A$ **ist ableitbar**

$\Leftrightarrow$ Aussage ϕ

wegen Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage A Widerspruch!

Beweisidee

Widerspruchsbeweis:

Wir haben:

Aussage $\phi \Leftrightarrow$ Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Aussage A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist ableitbar.

Aussage $\neg$A: Die Aussage mit der Nummer ϕ ist nicht ableitbar.

Ang. Aussage **A ist ableitbar**

wegen Konsistenz und Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage ϕ ist ableitbar $\Leftrightarrow$ Aussage $\neg A$ Widerspruch!

Ang. Aussage $\neg A$ **ist ableitbar**

$\Leftrightarrow$ Aussage ϕ

wegen Stärke des Systems

$\Rightarrow$ Aussage A Widerspruch!

$\Rightarrow$ Wir sehen: Aussage A und Aussage $\neg A$ sind nicht ableitbar.

Somit ist das System **unvollständig**.

Beweisidee

Idee: 2. Satz

Sei S ein formales und konsistentes System, das so stark ist, dass darin der 1. UVS formalisiert und bewiesen werden kann.

Beweisidee

Idee: 2. Satz

Sei S ein formales und konsistentes System, das so stark ist, dass darin der 1. UVS formalisiert und bewiesen werden kann.

Also beweist S die Aussage:

Idee: 2. Satz

Sei S ein formales und konsistentes System, das so stark ist, dass darin der 1. UVS formalisiert und bewiesen werden kann.

Also beweist S die Aussage:
"Wenn S konsistent ist, dann ist der Satz "Ich bin nicht beweisbar" nicht in S beweisbar."

Beweisidee

Idee: 2. Satz

Sei S ein formales und konsistentes System, das so stark ist, dass darin der 1. UVS formalisiert und bewiesen werden kann.

Also beweist S die Aussage:
"Wenn S konsistent ist, dann ist der Satz "Ich bin nicht beweisbar" nicht in S beweisbar."

Wir nehmen an, dass S die Aussage:
"S ist konsistent" beweist.

Beweisidee

Idee: 2. Satz

Sei S ein formales und konsistentes System, das so stark ist, dass darin der 1. UVS formalisiert und bewiesen werden kann.

Also beweist S die Aussage:
"Wenn S konsistent ist, dann ist der Satz "Ich bin nicht beweisbar" nicht in S beweisbar."

Wir nehmen an, dass S die Aussage:
"S ist konsistent" beweist.

Kombinieren wir beide Aussagen, erhalten wir in S einen Beweis der Aussage:
"Der Satz: "Ich bin nicht beweisbar" ist nicht in S beweisbar."

Beweisidee

Idee: 2. Satz

Sei S ein formales und konsistentes System, das so stark ist, dass darin der 1. UVS formalisiert und bewiesen werden kann.

Also beweist S die Aussage:
"Wenn S konsistent ist, dann ist der Satz "Ich bin nicht beweisbar" nicht in S beweisbar."

Wir nehmen an, dass S die Aussage:
"S ist konsistent" beweist.

Kombinieren wir beide Aussagen, erhalten wir in S einen Beweis der Aussage:
"Der Satz: "Ich bin nicht beweisbar" ist nicht in S beweisbar."
$\Leftrightarrow$ "Ich bin nicht beweisbar"

Beweisidee

Idee: 2. Satz

Sei S ein formales und konsistentes System, das so stark ist, dass darin der 1. UVS formalisiert und bewiesen werden kann.

Also beweist S die Aussage:
"Wenn S konsistent ist, dann ist der Satz "Ich bin nicht beweisbar" nicht in S beweisbar."

Wir nehmen an, dass S die Aussage:
"S ist konsistent" beweist.

Kombinieren wir beide Aussagen, erhalten wir in S einen Beweis der Aussage:
"Der Satz: "Ich bin nicht beweisbar" ist nicht in S beweisbar."
$\Leftrightarrow$ "Ich bin nicht beweisbar" Widersruch zum 1. UVS

Idee: 2. Satz

Sei S ein formales und konsistentes System, das so stark ist, dass darin der 1. UVS formalisiert und bewiesen werden kann.

Also beweist S die Aussage:
"Wenn S konsistent ist, dann ist der Satz "Ich bin nicht beweisbar" nicht in S beweisbar."

Wir nehmen an, dass S die Aussage:
"S ist konsistent" beweist.

Kombinieren wir beide Aussagen, erhalten wir in S einen Beweis der Aussage:
"Der Satz: "Ich bin nicht beweisbar" ist nicht in S beweisbar."
$\Leftrightarrow$ "Ich bin nicht beweisbar" Widersruch zum 1. UVS

Also ist S entweder **inkonsistent** oder es kann die **eigene Konsistenz nicht beweisen**.

Formaler Beweis

Gödelisierung:

Zunächst wird jeder L_{ME}-Formel ψ eine Konstante $\ulcorner\psi\urcorner$ (Gödelnummer) zugeordnet.

$$\ulcorner\dot{=}\urcorner = (0,0)$$

$$\ulcorner\wedge\urcorner = (0,1)$$

$$\ulcorner\neg\urcorner = (0,2)$$

$$\ulcorner(\urcorner = (0,3)$$

$$\ulcorner)\urcorner = (0,4)$$

$$\vdots$$

Für eine Formel $\psi = \zeta_0\,\zeta_1 \ldots \zeta_{n-1}$ der Länge n setzen wir $\ulcorner\psi\urcorner = \{(0,\ulcorner\zeta_0\urcorner),\ldots,(n-1,\ulcorner\zeta_{n-1}\urcorner)\}$.

Diese Nummerierung wird auf endliche Folgen erweitert.

Formaler Beweis

Diagonalisierung:

Satz 11.1: (Fixpunktsatz)

Für jede L_{ME}-Formel $\Sigma(x)$ gibt es eine Aussage ϕ mit

$$ZFC \vdash \quad \phi \leftrightarrow \Sigma(\ulcorner \phi \urcorner).$$

Wir brauchen das folgende Lemma:

Lemma:

Es gibt eine in ZFC definierbare Funktion *Sub* mit

$$ZFC \vdash \quad \ulcorner \psi(\ulcorner \chi \urcorner) \urcorner \doteq Sub(\ulcorner \psi \urcorner, \ulcorner \chi \urcorner)$$

für alle L_{ME}-Formeln $\psi(x)$ und χ.

Formaler Beweis

Beweis:

Sub beschreibt einfach die Einsetzung in Formeln.

Sei nun $\psi(v_0)$ die L_{ME}-Formel die zu $\Sigma(Sub(v_0, v_0))$ äquivalent ist. Dann sind in ZFC folgende Aussagen äquivalent:

$$\psi(\ulcorner\psi\urcorner) \sim \Sigma(Sub(\ulcorner\psi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner)) \sim \Sigma(\ulcorner\psi(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner)$$

Setze nun $\phi = \psi(\ulcorner\psi\urcorner)$

$$\Rightarrow \phi \sim \Sigma(\ulcorner\phi\urcorner). \qquad \square$$

Formaler Beweis

Das Beweisbarkeitsprädikat:

Sei *Bew(x)* die Formel, die (in ZFC) ausdrückt, dass x eine in ZFC beweisbare Aussage ist.

Folgende Löb-Axiome müssen jedoch erfüllt werden:

$$L1 : [ZFC \vdash \phi] \Rightarrow [ZFC \vdash Bew(\ulcorner \phi \urcorner)].$$

$$L2 : ZFC \vdash [Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \wedge Bew(\ulcorner \phi \to \psi \urcorner) \to Bew(\ulcorner \psi \urcorner)].$$

$$L3 : ZFC \vdash [Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \to Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \urcorner)].$$

Formaler Beweis

Folgerung 11.2:

11.1: $ZFC \vdash \phi \rightarrow \psi \Rightarrow ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner\psi\urcorner)$

11.2: $ZFC \vdash [Bew(\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner) \leftrightarrow (Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner\psi\urcorner))]$

Beweis:

(11.1) Sei $ZFC \vdash \phi \rightarrow \psi \overset{L1}{\Rightarrow} ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi \rightarrow \psi\urcorner)$.

$\overset{L2}{\Rightarrow} ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \rightarrow Bew(\ulcorner\psi\urcorner)$.

Definition:

Sei F eine Formel, deren Negation allgemeingültig ist, z.B. $\neg 0 \doteq 0$. Die Aussage $CON_{ZFC} = \neg Bew(\ulcorner F\urcorner)$ drückt dann die Konsistenz von ZFC aus.

Formaler Beweis

Satz: (2. UVS)

Wenn ZFC konsistent ist, ist CON_{ZFC} in ZFC unbeweisbar.

Beweis:

Wenn wir den Satz bewiesen haben, haben wir also gezeigt, dass

$$ZFC \vdash CON_{ZFC} \leftrightarrow \neg Bew(\ulcorner CON_{ZFC} \urcorner).$$

Sei ϕ eine Formel, die

$$ZFC \vdash \phi \leftrightarrow \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \qquad (11.3)$$

Gödelsatz!

erfüllt.

Wir zeigen zuerst, dass folgendes gilt:

$$ZFC \vdash \phi \leftrightarrow CON_{ZFC} \qquad (11.4)$$

Formaler Beweis

Beweis: $ZFC \vdash \phi \leftrightarrow CON_{ZFC}$ (11.4).

$ZFC \vdash F \to \phi \overset{11.1}{\Rightarrow} ZFC \vdash Bew(\ulcorner F \urcorner) \to Bew(\ulcorner \phi \urcorner)$.

Also gilt: $ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \to \neg Bew(\ulcorner F \urcorner)$
$\Leftrightarrow ZFC \vdash \phi \to CON_{ZFC}$.

Aus $ZFC \vdash \phi \to \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner)$
$\overset{11.1}{\Rightarrow} ZFC \vdash Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \to Bew(\ulcorner \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \urcorner)$.

$\overset{L3}{\Rightarrow} ZFC \vdash Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \to Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \urcorner)$

$\Rightarrow ZFC \vdash Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \to (Bew(\ulcorner \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \urcorner) \wedge Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner \phi \urcorner) \urcorner))$.

Formaler Beweis

Beweis: $ZFC \vdash \phi \leftrightarrow CON_{ZFC}$ (11.4).

$ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \to (Bew(\ulcorner\neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner))$.

$\overset{11.2}{\Rightarrow} ZFC \vdash (Bew(\ulcorner\neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner) \wedge Bew(\ulcorner Bew(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner)) \to Bew(\ulcorner F\urcorner)$.

Zur Erinnerung: $CON_{ZFC} = \neg Bew(\ulcorner F\urcorner)$.

Also gilt:

$Bew(\ulcorner\phi\urcorner) \to \neg CON_{ZFC}$, das heißt dann: $ZFC \vdash CON_{ZFC} \to \phi$. $\square$

Formaler Beweis

Satz: (**2. UVS**)

Wenn ZFC konsistent ist, ist CON_{ZFC} in ZFC unbeweisbar.

Beweis:

Angenommen:

$$ZFC \vdash CON_{ZFC} \overset{11.4}{\Rightarrow} ZFC \vdash \phi \overset{L1}{\Rightarrow} ZFC \vdash Bew(\ulcorner \phi \urcorner)$$

$$\text{aber } ZFC \vdash \phi \overset{11.3}{\Rightarrow} ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner \phi \urcorner).$$

Somit wäre ZFC **inkonsistent**. □

Formaler Beweis

Folgerung: (Tarskis Satz über die Wahrheitsdefiniton)

Wenn ZFC widerspruchsfrei ist, gibt es keine Formel $\mathcal{W}(x)$, so dass für alle Aussagen ϕ gilt:

$$ZFC \vdash \phi \leftrightarrow \mathcal{W}(\ulcorner \phi \urcorner)$$

Beweis:

Wähle ein ϕ mit

$$ZFC \vdash \phi \leftrightarrow \neg \mathcal{W}(\ulcorner \phi \urcorner).$$

Formaler Beweis

Erstellung einer Liste $\phi_0, \phi_1, \ldots$ aller in ZFC beweisbaren Aussagen.

"ϕ ist die n-te beweisbare Aussage" lässt sich nun mit einer L_{ME}-Formel *Bew(x,y)* ausdrücken, die die folgenden Eigenschaften hat:

Für alle $n = 0, 1, \ldots$ und alle Aussagen ϕ gilt:

- $\phi = \phi_n \Rightarrow ZFC \vdash Bew(\ulcorner\phi\urcorner, n).$ (11.5)
- $\phi \neq \phi_n \Rightarrow ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner\phi\urcorner, n).$ (11.6)

Formaler Beweis

Rossersatz:

Sei R eine Aussage mit

$$ZFC \vdash R \leftrightarrow \forall y \in \omega(Bew(\ulcorner R \urcorner, y) \rightarrow \exists\, z < y(Bew(\ulcorner \neg R \urcorner, z)))$$

John Barkley Rosser:

Anstelle des Lügner-Paradoxon “Ich bin nicht beweisbar” benutzt er die Aussage:

“Zu jedem Beweis für mich gibt es einen kürzeren Beweis für meine logische Negation.”

Formaler Beweis

Satz: (1. UVS)

Wenn ZFC konsistent ist, ist R unabhängig von ZFC.

Beweis:

Für beliebiges ψ sei ψ^* die Aussage

$$\forall y \in \omega(Bew(\ulcorner \psi \urcorner, y) \to \exists\, z < y(Bew(\ulcorner \neg\psi \urcorner, z)).$$

Wir zeigen zuerst:

$$ZFC \vdash \psi \Rightarrow ZFC \vdash \neg\psi^* \qquad (11.7)$$

$$ZFC \vdash \neg\psi \Rightarrow ZFC \vdash \psi^* \qquad (11.8)$$

Formaler Beweis

Beweis von 11.7: $ZFC \vdash \psi \Rightarrow ZFC \vdash \neg\psi^*$

Sei $ZFC \vdash \psi \overset{11.5}{\Rightarrow} \exists\, n$ *mit* $ZFC \vdash Bew(\ulcorner\psi\urcorner, n)$.

Da ZFC konsistent, $\overset{11.6}{\Rightarrow} ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, m)\ \forall m$

$\Rightarrow ZFC \vdash \neg\,[\,\exists\, z < n\colon Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, z)\,]$

$\Rightarrow ZFC \vdash \forall z < n\colon \neg Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, z) \Rightarrow ZFC \vdash \neg\psi^*$ $\square$

$$\neg(\psi^*) = \neg(\forall n \in \omega(Bew(\ulcorner\psi\urcorner, n)) \to \exists\, z < n\colon Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, z)).$$

$$= \exists n \in \omega(Bew(\ulcorner\psi\urcorner, n) \wedge \forall z < n\colon \neg Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, z)).$$

Formaler Beweis

Beweis von 11.8: $ZFC \vdash \neg\psi \Rightarrow ZFC \vdash \psi^*$

Sei $ZFC \vdash \neg\psi \overset{11.5}{\Rightarrow} \exists\, m \text{ mit } ZFC \vdash Bew(\ulcorner\neg\psi\urcorner, m)$.

Da ZFC konsistent $\overset{11.6}{\Rightarrow} ZFC \vdash \neg Bew(\ulcorner\psi\urcorner, n)\ \forall n$.

$\Rightarrow ZFC \vdash \forall y \in \omega(Bew(\ulcorner\psi\urcorner, y) \rightarrow m < y)$

$\Rightarrow ZFC \vdash \psi^*$ $\square$

Formaler Beweis

Satz: **(1. UVS)**

Wenn ZFC konsistent ist, ist R unabhängig von ZFC.

Beweis:

Wähle $\psi = R$

$ZFC \vdash R \overset{11.7}{\Rightarrow} ZFC \vdash \neg R$

$ZFC \vdash \neg R \overset{11.8}{\Rightarrow} ZFC \vdash R$

Also gilt: $ZFC \vdash R \Leftrightarrow ZFC \vdash \neg R$.

In beiden Fällen wäre ZFC **inkonsistent**. $\square$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit !!!