

Präsenzaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 4

Aufgabe 1.

- (a) Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\bar{\mathcal{B}}, \bar{\mathbb{R}})$ μ -integrierbar. Man zeige, dass dann zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ gilt: $|\int_A f d\mu| < \epsilon$.

Hinweis: Man reduziere zunächst auf den Fall $f \geq 0$. Dann betrachte man zunächst den Fall, dass f beschränkt ist und verwende für den allgemeinen Fall den Satz von der monotonen Konvergenz.

- (b) Seien jetzt $a < b$ reelle Zahlen und sei $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Wir definieren die Funktion $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $F(x) := \int_{[a; x]} f(t) dt$. Man beweise die folgenden Aussagen:

- (i) Die Funktion F ist gleichmäßig stetig.
- (ii) Ist $x_0 \in [a; b]$ ein Stetigkeitspunkt von f , so ist F im Punkt x_0 differenzierbar mit $F'(x_0) = f(x_0)$.
- (iii) Ist f auf dem ganzen Intervall $[a; b]$ stetig, so stimmen das Riemann-Integral von f und das Lebesgue-Integral von f überein.

Hinweise: Für (i) verwende man die Aussage von (a), für (ii) betrachte man $|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)|$ und für (iii) verwende man die Aussage von (ii) sowie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Aufgabe 2.

Es sei stets (Ω, \mathcal{A}) ein Messraum.

- (a) Seien μ und ν zwei Maße auf (Ω, \mathcal{A}) . Dann ist $\mu + \nu$ ebenfalls ein Maß auf (Ω, \mathcal{A}) und für alle $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R}_+)$ gilt

$$\int_{\Omega} f d(\mu + \nu) = \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} f d\nu.$$

- (b) Seien μ und ν zwei Maße auf (Ω, \mathcal{A}) mit $\mu \leq \nu$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R}_+)$

$$\int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} f d\nu.$$

- (c) Sei jetzt $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf (Ω, \mathcal{A}) . Man zeige, dass dann auch $\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ ein Maß auf (Ω, \mathcal{A}) ist und dass für alle $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{A}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ gilt:

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f d\mu_n.$$

Hinweis: Man zeige die Behauptungen zunächst für einfache Funktionen und wende dann die Definition des Integrals an!