Präsenzaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie I
Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathcal{A}$. Das Maß μ heißt *stetig in* A, wenn für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathcal{A}$ mit $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ ist. Ferner heißt μ stetig, wenn μ in jedem $A \in \mathcal{A}$ stetig ist. Man zeige, dass jedes endliche Maß μ stetig ist. Insbesondere ist also jedes Wahrscheinlichkeitsmaß P stetig.
Erinnerung: Die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Definition genau dann gegen A ($\lim_{n\to\infty} A_n = A$), wenn gilt: $A = \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$.

Aufgabe 2*.

(a) Man beweise die folgende Aussage, welche im Beweis von Beispiel 1.13 (e) verwendet wurde: Es seien $I_1, \ldots, I_m \in \mathcal{R}^d$ paarweise disjunkt, so dass $\bigcup_{k=1}^m I_k =: I \in \mathcal{R}^d$ ist. Dann gilt für den Elementarinhalt λ:

$$\lambda(I) = \sum_{k=1}^m \lambda(I_k)\,.$$

(b) Man „beweise" durch genaues Durchsehen des Beweises von Beispiel 1.13 (e) die folgende Aussage: Sei μ eine Mengenfunktion auf $\mathcal{R}^d$ mit Werten in $[0; +\infty]$ und mit $\mu(\emptyset) = 0$, so dass für paarweise disjunkte Quader $I_1, \ldots, I_m \in \mathcal{R}^d$ mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $I := \bigcup_{k=1}^m I_k \in \mathcal{R}^d$, stets gilt:

$$\mu(I) = \sum_{k=1}^m \mu(I_k)\,.$$

Dann gibt es genau einen Inhalt ν auf dem Ring $\mathcal{F}^d$ mit $\nu_{|\mathcal{R}^d} = \mu$. Und zwar, wenn $J \in \mathcal{F}^d$ die disjunkte Vereinigung von den Quadern $J_1, \ldots, J_m \in \mathcal{R}^d$ ist, so gilt

$$\nu(J) = \sum_{k=1}^m \mu(J_k)\,.$$

Aufgabe 3. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von in X kompakten Mengen mit $K_n \neq \emptyset$ und $K_{n+1} \subseteq K_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.
Hinweis: Man wähle $x_n \in K_n$, $n \in \mathbb{N}$, und zeige, dass eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $x \in K_1$ existieren mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Wieso liegt x in jedem

K_m, $m \in \mathbb{N}$?
Bemerkung: Die Aussage ist in jedem Hausdorffschen topologischen Raum X richtig und wird in der Vorlesung im Beweis von Satz 1.14 verwendet.

Aufgabe 4. Sei Ω eine überabzählbar unendliche Menge und es sei

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq \Omega \,:\, A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar } \}\,.$$

Man zeige, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist und dass durch die Vorschrift $\mu(A) := 0$, wenn A abzählbar ist, und $\mu(A) := 1$, wenn A^c abzählbar ist, ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ definiert wird.