Präsenzaufgaben zur Wahrscheinlichkeitstheorie I
Blatt 1

Aufgabe 1. Seien Ω und Ω' nichtleere Mengen, $f : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung und sei $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ ein Mengensystem. Dann definieren wir

$$f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(C) \,|\, C \in \mathcal{C}\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)\,.$$

Man zeige: Ist $\mathcal{C}$ ein Ring bzw. eine Algebra bzw. eine σ-Algebra in Ω', so gilt das Entsprechende auch für $f^{-1}(\mathcal{C})$.

Aufgabe 2. Sei Ω eine nichtleere Menge, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Teilmengen von Ω und es sei $A \subseteq \Omega$. Wir sagen, dass die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen A *konvergiert*, falls $\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = A$ gilt. Weiter sei I_A die *Indikator-Funktion* zur Menge A mit

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \in A \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Man beweise die folgenden Aussagen:

(a) Die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*), falls $A_n \subseteq A_{n+1}$ (bzw. $A_n \supseteq A_{n+1}$) für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Man zeige, dass jede monotone Folge von Mengen konvergiert, genauer gilt: Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, so gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, so gilt $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(b) Mit $B := \limsup_{n\to\infty} A_n$ und $C := \liminf_{n\to\infty} A_n$ gilt $I_B = \limsup_{n\to\infty} I_{A_n}$ und $I_C = \liminf_{n\to\infty} I_{A_n}$.

(c) Die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen A, wenn die Folge $(I_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen I_A punktweise konvergiert.

Hinweis/Bemerkung: Teil (b) rechtfertigt die Bezeichnungen lim sup und lim inf. Für den Beweis von (c) verwende man die Aussage von (b).

Aufgabe 3. Sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{A}$ sei eine σ-Algebra in Ω. Man zeige, dass $\mathcal{A}$ entweder endlich oder überabzählbar unendlich viele Elemente enthält.
Hinweis: Man nehme an, dass $\mathcal{A}$ abzählbar unendlich groß ist und führe wiefolgt einen Widerspruchsbeweis: Zu $x \in \Omega$ betrachte man die Menge

$$M_x := \bigcap_{\substack{B\in\mathcal{A}:\\ x\in B}} B\,.$$

Dann zeige man schrittweise die folgenden Aussagen:

(1) Es ist $M_x \in \mathcal{A}$ für jedes $x \in \Omega$.

(2) Sind $x, y \in \Omega$ mit $M_x \neq M_y$, so gilt $M_x \cap M_y = \emptyset$.

(3) Für jedes $B \in \mathcal{A}$ gilt $B = \bigcup_{x \in B} M_x$.

(4) Sei $N \subseteq \mathbb{N}$ und sei $(x_i)_{i \in N}$ eine Familie in Ω, so dass die Familie $(M_{x_i})_{i \in N}$ folgende Eigenschaften hat: Für alle $i, j \in N$ mit $i \neq j$ gilt $M_{x_i} \neq M_{x_j}$ und für jedes $x \in \Omega$ gibt es ein $i \in N$ mit $M_{x_i} = M_x$. Dann ist N eine abzählbar unendliche Menge und die Abbildung $\Phi : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{A}$ mit $\Phi(J) := \bigcup_{i \in J} M_{x_i}$ ist injektiv (sogar bijektiv).

(5) Man leite daraus den gewünschten Widerspruch her.