

Lösungen zu den Präsenzaufgaben Blatt 2

Aufgabe 2. zu (a): Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion nach d .

Induktionsanfang: $d = 1$. Es sei $I = [a; b)$ mit reellen Zahlen $a \leq b$ und für $k = 1, \dots, m$ sei $I_k = [a^{(k)}; b^{(k)})$ mit reellen Zahlen $a^{(k)} \leq b^{(k)}$. Da I die disjunkte Vereinigung der Intervalle I_k ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass gilt:

$$a = a^{(1)} \leq b^{(1)} = a^{(2)} \leq b^{(2)} = \dots \leq b^{(m)} = b$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned}\lambda(I) &= b - a = b^{(m)} - a^{(1)} \\ &= \sum_{k=1}^m (b^{(k)} - a^{(k)}) = \sum_{k=1}^m \lambda(I_k)\end{aligned}$$

Induktionsschritt: $d - 1 \rightarrow d$. Es gelte $I = \prod_{j=1}^d [a_j; b_j)$ und für $k = 1, \dots, m$ sei $I_k = \prod_{j=1}^d [a_j^{(k)}; b_j^{(k)})$. Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass $I_k \neq \emptyset$ für $k = 1, \dots, m$ gilt. Weiter wählen wir reelle Zahlen

$$a_d = c_1 < c_2 < \dots < c_l = b_d$$

so, dass

$$\{c_1, c_2, \dots, c_l\} = \{a_d^{(1)}, b_d^{(1)}, a_d^{(2)}, b_d^{(2)}, \dots, a_d^{(m)}, b_d^{(m)}\}$$

gilt, das heißt die Menge $\{c_1, c_2, \dots, c_l\}$ enthält sämtliche Endpunkte aller Intervalle in der d -ten Koordinate. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\lambda^d(I) &= \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) = (b_d - a_d) \prod_{j=1}^{d-1} (b_j - a_j) \\ &= \left(\sum_{i=2}^l (c_i - c_{i-1}) \right) \prod_{j=1}^{d-1} (b_j - a_j) \\ &= \sum_{i=2}^l (c_i - c_{i-1}) \prod_{j=1}^{d-1} (b_j - a_j)\end{aligned}\tag{1}$$

Wir definieren nun $I' := \prod_{j=1}^{d-1} [a_j; b_j] \in \mathcal{R}^{d-1}$ sowie für $k = 1, \dots, m$ den Quader $I'_k := \prod_{j=1}^{d-1} [a_j^{(k)}; b_j^{(k)}] \in \mathcal{R}^{d-1}$. Zu jedem $k \in \{1, \dots, m\}$ gibt es dann genau ein Paar (i_k, j_k) mit $i_k, j_k \in \{1, \dots, l\}$, $i_k < j_k$ und mit $I_k = I'_k \times [c_{i_k}; c_{j_k}]$. Sind ferner $k, r \in \{1, \dots, m\}$ mit $k \neq r$ und mit der Eigenschaft, dass $[c_{i_k}; c_{j_k}] \cap [c_{i_r}; c_{j_r}] \neq \emptyset$ ist, so muss $I'_k \cap I'_r = \emptyset$ gelten, denn es ist $I_k \cap I_r = \emptyset$ nach Voraussetzung. Für $i = 2, \dots, l$ definieren wir noch

$$\begin{aligned} K_i &:= \{k \in \{1, \dots, m\} : [c_{i_k}; c_{j_k}] \cap [c_{i-1}; c_i] \neq \emptyset\} \\ &= \{k \in \{1, \dots, m\} : [c_{i_k}; c_{j_k}] \supseteq [c_{i-1}; c_i]\}. \end{aligned}$$

Dann gilt für jedes $i = 2, \dots, l$:

$$I' = \bigcup_{k \in K_i} I'_k, \quad (2)$$

denn wir haben die Gleichung

$$\begin{aligned} I' \times [c_{i-1}; c_i] &= I \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times [c_{i-1}; c_i]) \\ &= \left(\bigcup_{k=1}^m I_k \right) \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times [c_{i-1}; c_i]) \\ &= \left(\bigcup_{k=1}^m I'_k \times [c_{i_k}; c_{j_k}] \right) \cap (\mathbb{R}^{d-1} \times [c_{i-1}; c_i]) \\ &= \bigcup_{k=1}^m \left[I'_k \times ([c_{i_k}; c_{j_k}] \cap [c_{i-1}; c_i]) \right] \\ &= \bigcup_{k \in K_i} \left(I'_k \times [c_{i-1}; c_i] \right) \\ &= \left(\bigcup_{k \in K_i} I'_k \right) \times [c_{i-1}; c_i], \end{aligned}$$

aus der wegen $[c_{i-1}; c_i] \neq \emptyset$ sofort die Gleichung (2) folgt. Weiter ist die Vereinigung in (2) disjunkt, wie wir oben gesehen haben, denn aus $k, r \in K_i$ und $k \neq r$ folgt $[c_{i_k}; c_{j_k}] \cap [c_{i_r}; c_{j_r}] \supseteq [c_{i-1}; c_i] \neq \emptyset$.

Aus (1), (2) und der Induktionsvoraussetzung (IV) erhalten wir somit:

$$\begin{aligned}
\lambda^d(I) &= \sum_{i=2}^l (c_i - c_{i-1}) \lambda^{d-1}(I') \\
&\stackrel{\text{IV}}{=} \sum_{i=2}^l (c_i - c_{i-1}) \sum_{k \in K_i} \lambda^{d-1}(I'_k) \\
&= \sum_{i=2}^l \sum_{k \in K_i} (c_i - c_{i-1}) \lambda^{d-1}(I'_k) \\
&= \sum_{k=1}^m \sum_{\substack{i \in \{2, \dots, l\}: \\ k \in K_i}} (c_i - c_{i-1}) \lambda^{d-1}(I'_k) \tag{3}
\end{aligned}$$

Für jedes $k \in \{1, \dots, m\}$ gilt ferner $\{i \in \{2, \dots, l\} : k \in K_i\} = \{i_k + 1, i_k + 2, \dots, j_k\}$. Somit erhalten wir aus (3)

$$\begin{aligned}
\lambda^d(I) &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=i_k+1}^{j_k} (c_i - c_{i-1}) \lambda^{d-1}(I'_k) \\
&= \sum_{k=1}^m (c_{j_k} - c_{i_k}) \cdot \lambda^{d-1}(I'_k) \\
&= \sum_{k=1}^m \lambda^d(I_k),
\end{aligned}$$

also die Behauptung. □

Aufgabe 3. Wir wählen $x_n \in K_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, wie im Hinweis beschrieben. Dann liegt die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ganz in der kompakten Menge K_1 und besitzt somit einen Häufungspunkt $x \in K_1$, das heißt, es gibt eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen x konvergiert. Wir behaupten nun, dass $x \in K_m$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt. Sei also $m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_k \geq m$ für alle $k \geq k_0$. Somit liegt die Folge $(x_{n_k})_{k \geq k_0}$, die ebenfalls gegen x konvergiert, ganz in der Menge K_m . Da K_m als kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes insbesondere abgeschlossen ist, folgt $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in K_m$. Mithin gilt $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} K_m$.