

Lösungen zu den Präsenzaufgaben

Blatt 1

Aufgabe 3. zu (1): Da \mathcal{A} nach Annahme abzählbar ist, ist M_x für jedes $x \in \Omega$ ein (höchstens) abzählbarer Schnitt von Mengen aus \mathcal{A} und somit wieder in der σ -Algebra \mathcal{A} enthalten.

zu (2): Seien $x, y \in \Omega$ mit $M_x \neq M_y$. Ohne Einschränkung gelte $M_x \not\subseteq M_y$. Dann muss nach Definition von M_x gelten, dass $x \notin M_y$ ist. Somit ist $x \in M_y^c \in \mathcal{A}$, das heißt M_y^c kommt im definierenden Schnitt von M_x vor und somit gilt $M_x \subseteq M_y^c$ und daher auch $M_x \cap M_y = \emptyset$.

zu (3): Sei $B \in \mathcal{A}$. Offenbar gilt dann $M_x \subseteq B$ für jedes $x \in B$, denn B kommt im Schnitt, der M_x definiert, vor. Somit folgt auch $\bigcup_{x \in B} M_x \subseteq B$. Sei umgekehrt $y \in B$. Dann gilt wegen $y \in M_y$ auch $y \in \bigcup_{x \in B} M_x$, also folgt auch die umgekehrte Inklusion.

zu (4): Da \mathcal{A} nach Voraussetzung abzählbar ist, existiert eine Menge $N \subseteq \mathbb{N}$ mit den geforderten Eigenschaften. Wäre N endlich, etwa $|N| = n \in \mathbb{N}$, so gäbe es nach (2) und (3) in \mathcal{A} genau 2^n Mengen in \mathcal{A} , was der Annahme, dass \mathcal{A} abzählbar unendlich groß ist, widerspräche. Somit muss N unendlich viele Elemente enthalten und es gilt $|N| = |\mathbb{N}|$. Nach (3) ist die Abbildung Φ surjektiv. Sind aber $J, J' \subseteq N$ mit $\Phi(J) = \Phi(J')$, so sei $j \in J$ beliebig. Dann folgt nach Definition von Φ , dass $x_j \in \Phi(J) = \Phi(J') = \bigcup_{i \in J'} M_{x_i}$. Nach Wahl der Folge $(x_k)_{k \in N}$ folgt dann aber unmittelbar $j \in J'$, also gilt $J \subseteq J'$. Analog folgt auch $J' \subseteq J$.

zu (5): Nach (4) gibt es eine injektive (sogar bijektive) Abbildung $\Phi : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathcal{A}$. Wegen $|\mathcal{P}(N)| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$ (siehe Anfängervorlesungen!) folgt daraus aber, dass \mathcal{A} überabzählbar ist, was den gewünschten Widerspruch liefert.