

## 9. Aufgabenblatt zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Abgabe bis 18. Dezember 2008

### 1. Aufgabe (4 Punkte):

Es seien  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ .

(a) Zeigen Sie:  $\mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^1 \Rightarrow \mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p$ .

(b) Zeigen Sie:  $\mathcal{L}^1 \subset \mathcal{L}^\infty \Rightarrow \mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^q$ . Finden Sie je einen Maßraum mit  $\mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^1$  und  $\mathcal{L}^1 \subset \mathcal{L}^\infty$ .

### 2. Aufgabe (4 Punkte):

Es seien  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ .

(a) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^q \cap \mathcal{L}^\infty$  gilt.

(b) Sei  $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^\infty$ . Zeigen Sie, dass dann  $\lim_{q \rightarrow \infty} \|f\|_q = \|f\|_\infty$  gilt.

*Hinweis:* Betrachten Sie  $\|\frac{f}{\|f\|_\infty}\|_q$ , und zeigen Sie  $\limsup_q \|f\|_q \leq \|f\|_\infty$ . Ferner betrachten Sie  $\|\frac{f}{\alpha}\|_q$  für  $\alpha < \|f\|_\infty$ , und zeigen Sie  $\liminf_q \|f\|_q \geq \alpha$ .

### 3. Aufgabe (4 Punkte):

Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine *streng konvexe* Funktion (das heißt, dass für alle  $x, y \in I$  mit  $x \neq y$  und  $\lambda \in (0, 1)$   $\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)$  gilt). Zeigen Sie, dass in der Formulierung der Jensenschen Ungleichung (Satz 7.17(c)) genau dann das Gleichheitszeichen steht, wenn  $X$   $P$ -fast-überall konstant ist.

### 4. Aufgabe (4 Punkte):

(a) Es sei  $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}$  eine nicht-negative, ganzzahlige Zufallsgröße. Zeigen Sie:

$$P(X > 0) \leq \mathbb{E}(X)$$

und

$$P(X = 0) \leq \frac{\text{Var}(X)}{(\mathbb{E}(X))^2}.$$

(b) Es sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für eine Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Elementen aus  $\mathcal{A}$  gelte

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{1 \leq i, j \leq n} P(A_i \cap A_j)}{(\sum_{k=1}^n P(A_k))^2} = 1.$$

Diskutieren Sie mit Hilfe von (a) die Zufallsgröße  $X_n := \sum_{k=1}^n 1_{A_k}$ .