

8. Aufgabenblatt zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Abgabe bis 11. Dezember 2008

Gegeben sei ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

1. Aufgabe (4 Punkte):

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : \Omega \times I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion, so dass für jedes $t \in I$ die Einschränkung $\omega \mapsto f(\omega, t)$ integrierbar und für jedes $\omega \in \Omega$ die Einschränkung $t \mapsto f(\omega, t)$ differenzierbar ist. Es gebe außerdem ein integrierbares $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$, so dass $|\frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t)| \leq g(\omega)$ für alle $t \in I$ und $\omega \in \Omega$ ist. Zeigen Sie, dass dann $t \mapsto \int_{\Omega} f(\omega, t) d\mu(\omega)$ differenzierbar ist, und es gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(\omega, t) d\mu(\omega) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t) d\mu(\omega).$$

2. Aufgabe (4 Punkte):

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ Borel-messbar, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f|_{[-n, n]}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie: Das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^0 f(x) dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x) dx$$

existiert genau dann, wenn f Lebesgue-integrierbar ist. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

(b) Zeigen Sie, dass $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ (für $x \neq 0$ und $0 \mapsto 1$) uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar ist. Welche Voraussetzung in (a) ist nicht erfüllt?

3. Aufgabe (4 Punkte):

(a) Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f, g \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

(b) Seien $0 < p < 1$ und $q < 0$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f, g \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \geq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

4. Aufgabe (4 Punkte):

(a) Seien $1 < p, q, r < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ und $f, g, h \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

$$\|fgh\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

(b) Seien $\alpha, \beta > 0$ mit $\alpha\beta < 1$ und $f, g \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

$$\left(\int_{\Omega} |fg| d\mu \right)^{\frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{1-\alpha\beta}} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^{1+\alpha} |g|^{1+\beta} d\mu \right) \left(\int_{\Omega} |f|^{1+\alpha} d\mu \right)^{\frac{\beta(1+\alpha)}{1-\alpha\beta}} \left(\int_{\Omega} |g|^{1+\beta} d\mu \right)^{\frac{\alpha(1+\beta)}{1-\alpha\beta}}$$