Eichelsbacher/Döbler

7. Aufgabenblatt zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Abgabe bis 4. Dezember 2008

Gegeben sei ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

1. Aufgabe (4 Punkte):

(a) Es seien messbare Funktionen $g, f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^+$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben. Zeigen Sie: Wenn g integrierbar ist und $f_n \leq g$ μ-f.ü., $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu \leq \int_\Omega \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

(b) Zeigen Sie, dass auf die Integrierbarkeit von g nicht verzichtet werden kann.

2. Aufgabe (4 Punkte):
Es seien $a > 1$, $a \in \mathbb{R}$, und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Zeigen Sie, dass f genau dann μ-integrierbar ist, wenn

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a^n \, \mu(a^n \leq |f| < a^{n+1}) < \infty.$$

3. Aufgabe (4 Punkte):
Sei P die Standardnormalverteilung auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ $(n \geq 1)$. Zeigen Sie, dass P rotationsinvariant ist, d.h. es gilt $P = O(P)$ für jede orthogonale Transformation O auf $\mathbb{R}^n$.

4. Aufgabe (4 Punkte):
Für jede positiv definite symmetrische Matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und jedes $b \in \mathbb{R}^n$ heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathcal{N}_n(b, \Sigma)$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ mit der Dichtefunktion $\varphi(\cdot, b, \Sigma)$, definiert wie in Satz 5.31 der Vorlesung, die n-dimensionale Normalverteilung mit Erwartungswertvektor b und Kovarianzmatrix Σ. Es sei Y ein $\mathcal{N}_n(b, \Sigma)$-verteilter Zufallsvektor in $\mathbb{R}^n$, $k \leq n$, $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ eine reelle $k \times n$-Matrix mit vollem Rang, und $a \in \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie, dass dann der Zufallsvektor $Z = AY + a$ die k-dimensionale Normalverteilung $\mathcal{N}_k(Ab + a, A\Sigma A^t)$ hat.