Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Eichelsbacher/Döbler
Wintersemester 2008/2009

6. Aufgabenblatt zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Abgabe bis 27. November 2008

1. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass μ genau dann σ-endlich ist, wenn eine μ-integrierbare Funktion $f : \Omega \to (0, \infty)$ existiert.

2. Aufgabe (4 Punkte):
Gegeben sei die *Dirichletsche Sprungfunktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Gilt $f \in \mathcal{EF}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Ist f λ-integrierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$.

3. Aufgabe (4 Punkte):
Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ mit $f \geq 0$. Zeigen Sie folgende Identität:

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_0^\infty \mu\Big([f > t]\Big) \, d\lambda(t).$$

4. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $f \geq 0$.

(a) Zeigen Sie: Durch $f\mu(A) := \int_A f \, d\mu$, $A \in \mathcal{A}$, wird ein endliches Maß auf $\mathcal{A}$ definiert.

(b) Sei $g \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ mit $g \geq 0$ und $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Zeigen Sie, dass dann $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, f\mu)$ und

$$\int g \, df\mu = \int g \cdot f \, d\mu$$

gilt. Gilt diese Gleichheit auch dann noch, wenn jedes $\mathcal{L}^1$ durch $\mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{A}, \overline{\mathbb{R}}^+)$ ersetzt wird?