

5. Aufgabenblatt zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Abgabe bis 20. November 2008

1. Aufgabe (4 Punkte):

Es sei $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes. Die verallgemeinerte Inverse von F ist für $0 < x < 1$ definiert durch

$$F^{-1}(x) := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid F(t) > x\}.$$

Zeigen Sie, dass F^{-1} Borel-messbar ist und dass F^{-1} als Zufallsvariable auf dem Lebesgue-Raum $((0, 1), \mathcal{B}((0, 1)), \lambda)$ eine Verteilung mit Verteilungsfunktion F hat.

2. Aufgabe (4 Punkte):

Es seien $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und $\pi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\pi_i((\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}) := \omega_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mathcal{A} := \sigma(\pi_i; i \in \mathbb{N})$ die kleinste σ -Algebra bzgl. der alle Projektionsabbildungen π_i ($i \in \mathbb{N}$) messbar sind. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen in \mathcal{A} liegen:

- (a) $A := \{(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ besitzt eine konvergente Teilfolge}\},$
- (b) $B := \{(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \limsup_{n \rightarrow \infty} (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} = 1\}.$

3. Aufgabe (4 Punkte):

Betrachten Sie zu monoton wachsendem, linksseitig stetigem $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ das Maß μ_F aus Satz 2.18. Geben Sie jeweils ein F an, so dass für alle $a < b$ gilt:

- (a) $\mu_F([a, b]) = \lambda([a, b])$
- (b) $\mu_F([a, b]) = \delta_\pi([a, b])$
- (c) $\mu_F([a, b]) = |[a, b] \cap \mathbb{N}|$
- (d) $\mu_F([a, b]) = \nu([a \leq f < b])$ für einen gegebenen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ mit $\nu(\Omega) < \infty$ und ein gegebenes $f \in \mathcal{L}_0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{R})$.

4. Aufgabe (4 Punkte):

Zeigen Sie, dass zu jedem $A \in \mathcal{B}$ mit $\lambda(A) > 0$ ein $L \subset A$ mit $L \notin \mathcal{B}$ existiert.

Hinweis: Sei zunächst $A \subset [-M, M]$ für ein $M > 0$. Imitieren Sie den Beweis von Satz 3.16 und nutzen Sie das Auswahlaxiom so, dass $L \subset A$.