

4. Aufgabenblatt zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Abgabe bis 13. November 2008

1. Aufgabe (4 Punkte):

Geben Sie einen Ring \mathcal{R} und zwei unterschiedliche Maße μ und ν auf $\sigma(\mathcal{R})$ an, für die $\mu|_{\mathcal{R}} = \nu|_{\mathcal{R}}$ gilt.

2. Aufgabe (4 Punkte):

Zeigen Sie: Eine Borelsche Menge $B \in \mathcal{B}^d$ ist genau dann eine Lebesgue-Borel-Nullmenge, wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

- Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine B überdeckende Folge $(I_n)_n$ offener Intervalle $I_n \subset \mathbb{R}^d$ mit $\sum_{n \geq 1} \lambda^d(I_n) \leq \varepsilon$.
- Es existiert eine B überdeckende Folge $(I_n)_n$ offener Intervalle mit $\sum_{n \geq 1} \lambda^d(I_n) < \infty$ derart, dass für jeden Punkt $x \in B$ gilt: $x \in I_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Für eine nichtleere Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$ bezeichne \mathcal{B}_Ω die Spur- σ -Algebra von \mathcal{B} in Ω .

3. Aufgabe (4 Punkte):

Es seien λ das Lebesgue-Maß auf \mathcal{B} und $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ die Exponentialfunktion. Zeigen Sie, dass die Identität $\lambda(\exp^{-1}(A)) = \lambda(\exp^{-1}(Ax))$ für alle $A \in \mathcal{B}_{(0, \infty)}$ und alle $x \in (0, \infty)$ gilt. ($Ax := \{y \in (0, \infty) \mid \exists a \in A : y = ax\}$)

4. Aufgabe (4 Punkte):

Es seien $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}$ und $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

- Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion g auch $\mathcal{B}_\Omega/\mathcal{B}$ -messbar ist.
- Ist g genau dann messbar, wenn $|g|$ messbar ist?