Fakultät für Mathematik
Ruhr-Universität Bochum

Eichelsbacher/Döbler
Wintersemester 2008/2009

3. Aufgabenblatt zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Abgabe bis 6. November 2008

1. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei $\delta : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \setminus \{\emptyset\} \to [0,\infty]$ mit $\delta(A) := \sup_{x,y\in A} \|x-y\|$. Für $s>0$, $\varepsilon>0$ und $A \subset \mathbb{R}^d$ sei

$$\mathcal{H}^s_\varepsilon(A) := \inf\left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (\delta(A_j))^s \,|\, A \subset \bigcup_j A_j,\ A_j \subset \mathbb{R}^d,\ \delta(A_j) \le \varepsilon \right\}.$$

Zeigen Sie $\mathcal{H}^s_\varepsilon \le \mathcal{H}^s_\vartheta$ für $\vartheta < \varepsilon$ und folgern Sie, dass

$$\mathcal{H}^s_*(A) := \lim_{\varepsilon\to 0+} \mathcal{H}^s_\varepsilon(A) = \sup_{\varepsilon>0} \mathcal{H}^s_\varepsilon(A)$$

ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^d$ ist. $\mathcal{H}^s_*$ heißt *Hausdorff-Maß*.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}^s_\varepsilon$ ein äußeres Maß ist.

2. Aufgabe (4 Punkte):
Gegeben sei das *Cantorsche Diskontinuum*

$$C_0 = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\frac{3^m-1}{2}} \left[\frac{2k}{3^m}, \frac{2k+1}{3^m}\right].$$

(a) Zeigen Sie: C_0 ist Borel-messbar und $\lambda^1(C_0) = 0$.

(b) Konstruieren Sie zu jedem $\alpha \in [0,1)$ eine abgeschlossene Menge $C_\alpha \subset [0,1]$ mit $C_0 \subset C_\alpha$, $C_\alpha^\circ = \emptyset$ und $\lambda^1(C_\alpha) = \alpha$. Gibt es so eine Menge auch im Fall $\alpha = 1$?

3. Aufgabe (4 Punkte):
Seien $0 \le s < t < \infty$ und $A \subset \mathbb{R}^d$. Wir betrachten das *Hausdorff-Maß* aus Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{H}^t_*(A) \le \mathcal{H}^s_*(A)$,

(b) $\mathcal{H}^s_*(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t_*(A) = 0$,

(c) $\mathcal{H}^t_*(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s_*(A) = \infty$,

(d) $\inf\{s > 0 \,|\, \mathcal{H}^s_*(A) = 0\} = \sup\{s \ge 0 \,|\, \mathcal{H}^s_*(A) = \infty\} =: \dim(A) \in [0,\infty]$. $\dim(A)$ heißt die *Hausdorff-Dimension* von A.

(e) (optional) Zeigen Sie, dass das *Cantorsche Diskontinuum* C_0 aus Aufgabe 2 *Hausdorff-Dimension* $c = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ hat.

Hinweis: Zeigen und benutzen Sie, daß $\mathcal{H}^c_* = 1$ gilt. Finden Sie dazu eine passende Überdeckung von C_0, indem Sie das Konstruktionsverfahren von C_0 und die Identität $2^n 3^{-nc} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ benutzen.

Bitte wenden

4. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei $\mu = \delta_\omega$ das Dirac-Prämaß in einem Punkt $\omega \in \Omega$ auf einem Ring $\mathcal{R}$ in Ω. Unter der Voraussetzung, dass sich $\{\omega\}$ als Durchschnitt und Ω als Vereinigung jeweils einer Folge von Mengen des Ringes $\mathcal{R}$ darstellen lassen, zeigen Sie:

(a) Das zu μ im Sinne der Definition in Satz 2.3 gehörige äußere Maß μ^* ordnet jeder Menge $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ den Wert 1 bzw. 0 zu, je nachdem ob ω in A oder in A^c liegt.

(b) Alle Teilmengen von Ω sind μ^*-messbar.

(c) μ^* ist das Maß δ_ω auf $\mathcal{P}(\Omega)$.